1 Addenda al secondo fascicolo

Quanto segue va aggiunto al secondo fascicolo delle dispense.

Definizione 1.1 Sia I un qualunque insieme di indici, e sia $\{A_i : i \in I\}$ una famiglia di eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Diremo che tali eventi sono *indipendenti* se per ogni sottoinsieme finito J di I, si ha

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

La Proposizione che segue afferma che se in una famiglia di eventi indipendenti si rimpiazzano alcuni eventi con i loro complementari, si ottiene ancora una famiglia di eventi indipendenti.

Proposizione 1.2 *Sia $\{A_i : i \in I\}$una famiglia di eventi indipendenti, $I' \subseteq I$, e definiamo*

$$B_i = \begin{cases} A_i^c & \text{se } \; i \in I' \\ A_i & \text{se } \; i \in I \setminus I'. \end{cases}$$

Allora $\{B_i : i \in I\}$ è una famiglia di eventi indipendenti.

Dimostrazione. Sia $J \subset I$ finito, e sia $J' = J \cap I'$. Dobbiamo mostrare che

$$P\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \prod_{j \in J} P(B_j). \tag{1.1}$$

Possiamo supporre che

$$J = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}, \; J' = \{j_1, \ldots, j_k\},$$

dove $k \leq m$. Se $k = 0$, la (1.1) segue immediatamente dall'indipendenza di $\{A_i : i \in I\}$. Supponiamo $k = 1$. Usando l'indipendenza di $\{A_i : i \in I\}$, si ha

$$\begin{aligned}
P\left(B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \cdots \cap B_{j_k}\right) &= P\left(A_{j_1}^c \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}\right) \\
&= P\left([A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}] \setminus [A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}]\right) \\
&= P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_k}) - P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_k}) \\
&= [1 - P(A_{j_1})]P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_k}) \\
&= P(A_{j_1}^c)P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_k}) \\
&= P(B_{j_1})P(B_{j_2}) \cdots P(B_{j_k}).
\end{aligned}$$

A questo punto si procede per induzione su k, per trattare tutti i casi $0 \leq k \leq m$. Si lasciano i semplici dettagli al lettore. ∎