Esame di Algebra 1

8 febbraio 2012

Esercizio 1. Siano G, H, K gruppi ed $f : G \to H$, $g : G \to K$ omomorfismi di gruppi. Si supponga g suriettivo e $\ker g \subseteq \ker f$.
(a) Si dimostri che esiste un omomorfismo $h : K \to H$ tale che $f = h \circ g$, cioè tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & H \\ K \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

sia commutativo.
(b) Si dimostri che l'omomorfismo $h : K \to H$ tale che $f = h \circ g$ è unico.
(c) Si dimostri che $h(K) = f(G)$.
(d) Si dimostri che $\ker h = g(\ker f)$.

Esercizio 2. (a) Si determinino gli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
(b) Quanti e quali sono gli elementi del gruppo $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ degli automorfismi del gruppo additivo $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$?

Esercizio 3. Sia R l'anello delle matrici

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Si dimostri che

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z} \right\}$$

è un ideale di R.
(b) L'anello quoziente R/I è commutativo?
(c) L'anello quoziente R/I è un dominio di integrità?

Esercizio 4. Sia R un anello commutativo con identità.
(a) Si definisca cosa si intende per ideale *massimale* di R.
(b) Sia I un ideale di R. Si dimostri che I è un ideale massimale di R se e solo se l'anello quoziente R/I è un campo.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{Z}[i] = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$, di modo che $\mathbb{Z}[i]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$, detto l'*anello degli interi di Gauss.* Sia $f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $f(a + ib) = a + 2b + 5\mathbb{Z}$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.
(a) Si dimostri che f è un omomorfismo di anelli, e che è suriettivo.
(b) Si dimostri che $1 + 2i \in \ker f$ e, utilizzando la norma $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$, definita da $N(a+ib) = a^2 + b^2$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, si dimostri che $1+2i$ è un elemento irriducibile di $\mathbb{Z}[i]$.
(c) Sia $(1 + 2i)$ l'ideale principale di $\mathbb{Z}[i]$ generato da $1 + 2i$. L'ideale $(1 + 2i)$ è massimale? È primo?
(d) Si dimostri che $\ker f = (1 + 2i)$.