

Compito scritto di Algebra 1

16 febbraio 2016

Esercizio 1. Sia \mathbb{Q}^+ l'insieme dei numeri razionali positivi. Sull'insieme \mathbb{Q}^+ si definisca una relazione \preceq ponendo, per ogni $x, y \in \mathbb{Q}^+$, $x \preceq y$ se $\frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$.

- (a) Si dimostri che \preceq è un'ordinamento parziale su \mathbb{Q}^+ .
- (b) Si determini, se esiste, il massimo di \mathbb{Q}^+ in tale ordinamento parziale.
- (c) Si determinino, se esistono, gli elementi minimali di \mathbb{Q}^+ (in tale ordinamento parziale).

Si consideri ora il sottoinsieme ordinato (A, \preceq) di \mathbb{Q}^+ , ove $A = \{\frac{1}{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- (d) Si determini, se esiste, il massimo di A (rispetto all'ordine indotto da \preceq).
- (e) Si determini, se esiste, l'estremo superiore di A in \mathbb{Q}^+ .

Esercizio 2. Siano G un gruppo abeliano finito e $X = \{g \in G \mid g^2 = 1\}$. Si dimostri che $\prod_{g \in G} g = \prod_{g \in X} g$. [Suggerimento: Si dimostri che $\{\{g, g^{-1}\} \mid g \in G\}$ è una partizione di $G \dots$]

Esercizio 3. Sia G un gruppo. Per ogni $a \in G$, sia $f_a: G \rightarrow G$ l'applicazione definita da $f_a(x) = ax$ per ogni $x \in G$.

- (a) Si dimostri che f_a è una biiezione per ogni $a \in G$.
- (b) Sia S_G il gruppo simmetrico su G , ossia il gruppo di tutte le biiezioni di G in G , ed $f: G \rightarrow S_G$ l'applicazione definita, per ogni $a \in G$, da $f(a) = f_a$. Si dimostri che f è un omomorfismo iniettivo di gruppi.
- (c) Si dimostri che ogni gruppo finito di ordine n è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo S_n , il gruppo simmetrico su n oggetti. (Tale risultato si chiama "Teorema di Cayley".)

Esercizio 4. (a) Si dica cosa si intende per *dominio euclideo*.

- (b) Si dica cosa si intende per *ideale principale*.

Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss, ossia il sottoanello del campo \mathbb{C} dei numeri complessi i cui elementi sono tutti i numeri complessi $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Sia $\nu: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $\nu(a + ib) = a^2 + b^2$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$. ($\nu(a + ib)$ si chiama la *norma* di $a + ib$.)

- (c) Si dimostri che ν è un omomorfismo di monoidi moltiplicativi.

Nel resto dell'esercizio, sia x un elemento di $\mathbb{Z}[i]$.

- (d) Si dimostri che $\nu(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.
- (e) Si dimostri che $\nu(x) = 1$ se e solo se x è un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[i]$.

Sia ora $A = \nu(\mathbb{Z}[i]) \setminus \{0, 1\}$, di modo che A può essere visto come sottoinsieme ordinato dell'insieme parzialmente ordinato $(\mathbb{N}, |)$.

- (f) Si dimostri che se $\nu(x)$ è un elemento minimale di A , allora x è un elemento irriducibile di $\mathbb{Z}[i]$.

Esercizio 5. (a) Si enunci il Teorema di Ruffini.

- (b) Si dimostri il Teorema di Ruffini.