Esame scritto di Algebra 1 del 17 febbraio 2014

Esercizio 1. (a) Si dimostri che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

per ogni intero $n \geq 1$. [Suggerimento: usare la Formula del binomio.]

(b) Si dimostri che $2^n n! \leq n^n$ per ogni intero $n \geq 6$. [Suggerimento: ragionare per induzione facendo uso della diseguaglianza dimostrata in (a).]

Esercizio 2. Sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si definisca una relazione ρ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{N}$, $a\rho b$ se ogni numero primo che divide a divide anche b.

(a) La relazione ρ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{N}$?

(b) La relazione ρ è un ordinamento parziale su $\mathbb{N}$?

Sull'insieme $\mathbb{N}$ si definisca poi una relazione $\equiv$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{N}$, $a \equiv b$ se $a\rho b$ e $b\rho a$.

(c) La relazione $\equiv$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{N}$?

(d) La relazione $\equiv$ è un ordinamento parziale su $\mathbb{N}$?

(e) Per ogni $a \in \mathbb{N}$ si determini la classe di equivalenza $[a]_\equiv$ di a modulo $\equiv$.

(f) Che cardinalità hanno le classi di equivalenza $[0]_\equiv$, $[1]_\equiv$ e $[2]_\equiv$?

Esercizio 3. Sia $f\colon H \to K$ un omomorfismo di gruppi. Nel gruppo prodotto diretto $H \times H$ si consideri il sottoinsieme

$$G = \big\{(a,b) \in H \times H \mid f(a) = f(b)\big\}.$$

(a) Si dimostri che G è un sottogruppo di $H \times H$.

(b) Si dimostri che se K è abeliano, allora G è sottogruppo normale di $H \times H$.

Esercizio 4. (a) Sia R un dominio di integrità. Si dimostri che in R ci sono esattamente due elementi a tali che $a^2 - a = 0$.

Nel resto di questo esercizio, R è invece l'anello $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$, dove X è un insieme non vuoto. In R (l'anello delle parti di X) l'addizione $\triangle$ è la differenza simmetrica.

(b) Si dimostri che $a^2 - a = 0$ per ogni elemento $a \in R$.

(c) Si calcoli la caratteristica di R e si determini il sottoanello fondamentale di R.

(d) Si dimostri che se R è un dominio di integrità, allora:

(i) X ha esattamente un elemento,

(ii) R è isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e

(iii) R è un campo.

Esercizio 5. (a) Si enunci il Teorema di Ruffini.

(b) Si dimostri il Teorema di Ruffini.