Secondo compitino di Algebra 1

23 gennaio 2017

Esercizio 1. Siano G un gruppo, H un sottogruppo di G e g, g' elementi di G.
(a) Si dimostri che le seguenti condizioni sono equivalenti:
(1) $gH = g'H$.
(2) $g^{-1}g' \in H$.
(3) $Hg^{-1} = Hg'^{-1}$.

(b) Si dimostri che l'insieme $\{ gH \mid g \in G \}$ delle classi laterali sinistre è una partizione di G.

Esercizio 2. Siano G un gruppo ed S un sottoinsieme di G. Si definiscano $C = \{ g \in G \mid gs = sg \text{ per ogni } s \in S \}$ ed $N = \{ g \in G \mid gS = Sg \}$ (C ed N si chiamano rispettivamente il *centralizzante* e il *normalizzante* di S in G). Si dimostri che:
(a) C ed N sono sottogruppi di G.
(b) $C \subseteq N$.
(c) C è sottogruppo normale di N.

Esercizio 3. (a) Si dimostri che se I e J sono ideali di un anello R, allora anche la loro somma $I + J = \{ i + j \mid i \in I,\ j \in J \}$ è un ideale di R.
(b) In particulare, se $R = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z}$ e $J = m\mathbb{Z}$ ($n, m \geq 0$), allora $I+J = n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z} = t\mathbb{Z}$ per qualche $t \in \mathbb{Z}$. Si determini t.

Esercizio 4. Siano R ed S anelli ed $R \times S$ il loro prodotto diretto (ossia il prodotto cartesiano di R ed S con le operazioni per componenti).
(a) Si dimostri che $R \times \{0_S\}$ e $\{0_R\} \times S$ sono ideali di $R \times S$, che la loro intersezione è l'ideale nullo di $R \times S$ e che la loro somma è $R \times S$.

Viceversa, sia T un anello con due ideali I e J tali che $I \cap J = \{0_T\}$ e $I + J = T$.
(b) Si dimostri che il prodotto diretto $I \times J$ è isomorfo a T.
(c) Si dimostri che se T è anello con identità, $I \neq \{0_T\}$ e $J \neq \{0_T\}$, allora anche I e J sono anelli con identità.

Ogni risposta deve essere giustificata.