Compito scritto di Algebra 1

28 giugno 2016

Esercizio 1. Siano A, B insiemi e sia $f\colon A \to B$ un'applicazione.
(a) Si dimostri che f è iniettiva se e solo se per ogni insieme C e ogni coppia di applicazioni $g, h\colon C \to A$ si ha che $fg = fh$ implica $g = h$.
(b) Si dimostri che f è suriettiva se e solo se per ogni insieme C e ogni coppia di applicazioni $g, h\colon B \to C$ si ha che $gf = hf$ implica $g = h$.

Esercizio 2. Siano G un gruppo e N, N' sottogruppi normali di G. Si dimostri che $N \cap N'$ e $NN' = \{\, nn' \mid n \in N,\ n' \in N' \,\}$ sono sottogruppi normali di G.

Esercizio 3. Sia $G = GL(2, \mathbb{R})$ il gruppo moltiplicativo delle matrici 2×2 ad elementi in $\mathbb{R}$ con determinante non nullo, e sia $N = \{\, A \in G \mid \det(A) \in \mathbb{Q} \,\}$. Sia $\mathbb{R}^*$ il gruppo moltiplicativo dei numeri reali non nulli, e $\mathbb{Q}^*$ il suo sottogruppo dei numeri razionali non nulli.
(a) Si determini un omomorfismo di gruppi suriettivo di G nel gruppo $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$.
(b) Si dimostri che N è sottogruppo normale di G e che $G/N \cong \mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$.
(c) Si dimostri che il gruppo G/N è commutativo.
(d) Si determini il più piccolo intero positivo n tale che $\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} N \right)^n = 1_{G/N}$. (Tale n si dice il *periodo* dell'elemento $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} N$ di G/N.)
[Facoltativo: (e) Un gruppo H si dice *periodico* se per ogni $h \in H$ esiste un intero positivo n tale che $h^n = 1_H$. Il gruppo G/N è periodico?]

Esercizio 4. Sia R un anello con identità.
(a) Si dica cosa si intende per *caratteristica* di R.
(b) Sia $M_2(\mathbb{Z})$ l'anello di tutte le matrici 2×2 ad elementi in $\mathbb{Z}$. Si consideri l'ideale $I = \left\{ \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ di $M_2(\mathbb{Z})$. Si determini la caratteristica di $M_2(\mathbb{Z})/I$.

Esercizio 5. Si dimostri che in un dominio euclideo ogni ideale è principale.