

Esame di Algebra 1 del 2 luglio 2012

1. Siano A, B insiemi ed $f: A \rightarrow B$ un'applicazione. Diciamo che un sottoinsieme A' di A è *chiuso per f* se, per ogni $a \in A$ e ogni $a' \in A'$, $f(a) = f(a')$ implica $a \in A'$.
 - (a) Sia $A' \subseteq A$. Si dimostri che $f^{-1}(f(A')) = A'$ se e solo se A' è chiuso per f .
 - (b) Sia $B' \subseteq B$. Si dimostri che $f(f^{-1}(B')) = B'$ se e solo se $B' \subseteq f(A)$.
 - (c) Sia $\mathcal{L} = \{A' \mid A' \subseteq A, A' \text{ chiuso per } f\}$, e sia $\mathcal{P}(f(A))$ l'insieme delle parti di $f(A)$. Si definisca una biiezione $\Psi: \mathcal{P}(f(A)) \rightarrow \mathcal{L}$.
2. Siano a, b numeri interi.
 - (a) Si dica cosa si intende per *massimo comun divisore* di a e b .
 - (b) Si dimostri che se a, b non sono entrambi nulli, allora esiste un loro massimo comun divisore positivo.
3. Sia G un gruppo e $H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots$ una catena di sottogruppi di G .
 - (a) Si dimostri che il sottoinsieme $H = \bigcup_{n \geq 0} H_n$ è un sottogruppo di G .
 - (b) Si dimostri che se ogni H_n è normale in G , allora H è normale in G .
4. Sia $\varphi: R \rightarrow S$ un omomorfismo suriettivo di anelli, e sia I un ideale di S .
 - (a) Si dimostri che $\varphi^{-1}(I)$ è un ideale di R .
 - (b) Si dimostri che $R/\varphi^{-1}(I) \cong S/I$.
 - (c) Si dia un esempio di un omomorfismo non suriettivo di anelli $\varphi: R \rightarrow S$ e di un ideale J di R per il quale $\varphi(J)$ non sia un ideale di S .
5.
 - (a) Si enunci il Teorema di Ruffini.
 - (b) Si dimostri il Teorema di Ruffini.