Compito scritto di Algebra 1

12 luglio 2016

Esercizio 1. Sia $(\mathbb{Q}, \leq)$ l'insieme dei numeri razionali con l'ordine usuale. Si consideri il suo sottoinsieme $A = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x > -1,\ x^2 \leq 3 \,\}$.
(a) Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di A.
(b) Si determinino, se esistono, gli elementi massimali e gli elementi minimali di A.
(c) Si determinino, se esistono, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A in $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2. Sia $G = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ con il prodotto definito ponendo

$$(x, y)(x', y') = (x + yx', yy')$$

per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.
(a) Si dimostri che G è un gruppo rispetto a tale operazione.
(b) Si dimostri che $N = \{\, (x, 1) \mid x \in \mathbb{C} \,\}$ è un sottogruppo normale di G e che $G/N \cong \mathbb{C}^*$.
(c) Si dimostri che se H è un qualunque sottogruppo di G contenente N, allora H è un sottogruppo normale di G.

Esercizio 3. Siano $f\colon G \to G'$ un omomorfismo di gruppi e H un sottogruppo di G. Si dimostri che $f^{-1}(f(H)) = H \cdot \ker f$.

Esercizio 4. Sia R un anello con identità.
(a) Si dica cosa si intende per *caratteristica* di R.
(b) Sia $T_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ l'anello di tutte le matrici triangolari superiori 2×2 ad elementi in $\mathbb{Z}$. Si consideri l'ideale $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3b \\ 0 & 3c \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ di $T_2(\mathbb{Z})$. Si determini la caratteristica di $T_2(\mathbb{Z})/I$.

Esercizio 5. Sia p un numero primo fissato. Per ogni $x \in \mathbb{Z}$, sia $\overline{x} = x + p\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Sia $f = x^5 + \overline{2}x^4 + \overline{3}x^3 + \overline{4}x^2 + \overline{5}x - \overline{3}$ di modo che f è un polinomio nell'indeterminata x a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
(a) Si divida f per $x - \overline{1}$ nell'anello dei polinomi $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$. Quali sono il quoto e il resto della divisione?
(b) Si divida $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x - 3$ per $x - 1$ nell'anello dei polinomi $\mathbb{Q}[x]$.
(c) Per quanti e quali primi p il polinomio $x - \overline{1}$ divide f nell'anello dei polinomi $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$?
(d) Per quanti e quali primi p si ha che $\overline{1}$ è radice del polinomio f nel campo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?