Prima prova di accertamento di Algebra 1 del 28 novembre 2012

Esercizio 1. (a) Siano A e B insiemi, $f\colon A \to B$ un'applicazione arbitraria e b un elemento di B. Si dica cosa si denota con $f^{-1}(b)$.

(b) Se $A = B = \mathbb{N} = \{0, 1, 2\dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali ed $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è definita da $f(n) = n$ se $n \in \mathbb{N}$ è pari e $f(n) = n+1$ se $n \in \mathbb{N}$ è dispari, l'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?

(c) Se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è l'applicazione considerata in (b), cos'è $f^{-1}(7)$? Cos'è $f(\{3, 4\})$?

Esercizio 2. Sull'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi si definisca la relazione $\sim$ ponendo, per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \sim y$ se $|x| = |y|$. Qui $|x|$ denota il modulo di x.

(a) Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$.

(b) Si descrivano le classi di equivalenza modulo $\sim$. In particolare, che cardinalità hanno?

(c) Si dimostri che ponendo $f([a]_\sim) = [a^2 + 1]_\sim$ per ogni $a \in \mathbb{Z}$ si dà una buona definizione di un'applicazione $f\colon \mathbb{Z}/\sim \to \mathbb{Z}/\sim$. Tale applicazione f è iniettiva? È suriettiva?

Esercizio 3. (a) Si dica cosa si intende per *elemento minimale* di un insieme parzialmente ordinato.

Si consideri il reticolo $(\mathbb{N}, |)$, dove $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali e $|$ è la relazione "divide". Si consideri l'insieme $A = \{\, 2n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 30 \,\}$ di tutti i numeri naturali pari ≥ 60.

(b) Si determini, se esiste, l'estremo superiore di A in $\mathbb{N}$.

(c) Si determini, se esiste, l'estremo inferiore di A in $\mathbb{N}$.

Esercizio 4. Si consideri il monoide commutativo $(\mathbb{Z}, *)$, in cui l'operazione $*$ è definita, per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$, da $x * y = x + y$ se x e y sono entrambi pari, e $x * y = x + y + 1$ altrimenti.

(a) Si dimostri per induzione su n che $(-3)^n = -(2n + 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. [*Suggerimento per* (a): determinare anzitutto l'identità del monoide.]

(b) Si determini per quali $d \in \mathbb{Z}$ il sottoinsieme $d\mathbb{Z} = \{\, dz \mid z \in Z \,\}$ è chiuso per l'operazione $*$.

(c) Si determini il sottomonoide di $(\mathbb{Z}, *)$ generato da 0 e 1.