Prima prova di accertamente di Algebra 1
12 novembre 2014

Ogni risposta deve essere giustificata.

Esercizio 1. Sia $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ l'applicazione definita, per ogni $z \in \mathbb{Z}$, da

$$\varphi(z) = \begin{cases} z-1 & \text{se } z \geq 1, \\ -2z & \text{se } z \leq 0. \end{cases}$$

(a) L'applicazione φ è iniettiva?
(b) L'applicazione φ è suriettiva?

Esercizio 2. (a) Si completi la seguente definizione. Siano a, b numeri interi. Un numero intero d si dice un *massimo comun divisore* di a e b se....
(b) Si dimostri che se a e b sono due numeri interi non entrambi nulli, allora esiste un loro massimo comun divisore positivo d. Inoltre, esistono numeri interi α, β tali che $d = \alpha a + \beta b$.
(c) Si calcoli un massimo comun divisore positivo d di 123456789 e 12345678.
(d) Si determinino due interi α, β tali che $d = \alpha \cdot 123456789 + \beta \cdot 12345678$.

Esercizio 3. Sia X l'insieme di tutte le applicazioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, e sia $\sim$ la relazione su X definita ponendo, per ogni $f, g \in X$, $f \sim g$ se l'insieme $\{\, n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n) \,\}$ è finito.
(a) Si dimostri che $\sim$ una relazione d'equivalenza su X.
(b) Per ogni numero naturale n sia $f_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'applicazione costante definita da $f_n(k) = n$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Sia poi $\Phi\colon \mathbb{N} \to X/\sim$ l'applicazione definita da $\Phi(n) = [f_n]_\sim$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dica se Φ è iniettiva.
(c) L'insieme quoziente $X/\sim$ è finito o infinito?

Esercizio 4. Sia $(\mathbb{N}, |)$ l'insieme dei numeri naturali parzialmente ordinato dalla relazione "divide". Sia $A = \{\, 2^n \mid n \geq 2 \,\}$.
(a) Si determini, se esiste, l'estremo superiore di A in $(\mathbb{N}, |)$.
(b) Si determini, se esiste, l'estremo inferiore di A in $(\mathbb{N}, |)$.