

Primo compito di Algebra 1

1 dicembre 2017

Esercizio 1. È vero che data una qualunque applicazione $f: A \rightarrow B$, con A e B insiemi non vuoti, esiste sempre un sottoinsieme A' di A tale che la restrizione $f|_{A'}: A' \rightarrow B$, definita da $f|_{A'}(a') = f(a')$ per ogni $a' \in A'$, sia iniettiva?

Esercizio 2. (a) Si completi la seguente definizione. “Siano a, b due numeri interi. Un numero intero d si dice un *massimo comun divisore* di a e b se ...”

(b) Siano a, b due numeri interi non entrambi nulli. Si dimostri che esiste un massimo comun divisore d di a e b , e che esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tali che $d = \alpha a + \beta b$.

Esercizio 3. Si consideri il sottoinsieme ordinato $\mathbb{N} \setminus \{6\}$ del reticolo $(\mathbb{N}, |)$. Il sottoinsieme ordinato $\mathbb{N} \setminus \{6\}$ con l'ordine indotto è un reticolo?

Esercizio 4. Sia $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$. Si definisca un'operazione in S ponendo, per ogni $(a, b, c), (a', b', c') \in S$,

$$(a, b, c) \cdot (a', b', c') = (aa', ab' + ba', c + c').$$

(a) Si dimostri che (S, \cdot) è un monoide commutativo, determinandone l'identità.

(b) Si dimostri che l'applicazione $\varphi: S \rightarrow \mathbb{Z}$, definita da $\varphi(a, b, c) = c$ per ogni $(a, b, c) \in S$, è un omomorfismo di monoidi di S nel monoide additivo \mathbb{Z} dei numeri interi.

Ogni risposta deve essere giustificata.