

Seconda prova di accertamento di Algebra 1 del 29 gennaio 2014

Esercizio 1. Siano G un gruppo, H un sottogruppo di G e g un elemento di G .

(a) Si dica cosa si intende per *classe laterale sinistra di G modulo H di rappresentante g* .

(b) Si dimostri che gli insiemi gH e H sono equipotenti.

(c) Siano \mathcal{S} l'insieme delle classi laterali sinistre di H in G e \mathcal{D} l'insieme delle classi laterali destre di H in G . Si definisca una biiezione $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{D}$.

(d) Si dimostri che l'applicazione φ definita in (c) è ben definita.

Esercizio 2. Se G è un gruppo e g un suo elemento, chiamiamo *periodo* di g il più piccolo intero positivo n tale che $g^n = 1_G$ se un tale intero positivo esiste; altrimenti, se $g^n \neq 1_G$ per ogni intero $n \geq 1$, diciamo che g ha *periodo infinito*.

Sia $(G, *)$ il gruppo costituito dall'insieme $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dei numeri reali non nulli dotato dell'operazione $*$ definita ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$a * b = \begin{cases} ab & \text{se } a > 0, \\ \frac{a}{b} & \text{se } a < 0, \end{cases}$$

dove ab e $\frac{a}{b}$ sono calcolati mediante l'usuale prodotto in \mathbb{R} .

(a) Si determini il periodo degli elementi di G .

(b) Si dimostri che gli elementi di G di periodo infinito, insieme all'identità, costituiscono un sottogruppo H di G .

(c) Si dimostri che tutti i sottogruppi di G contenuti in H sono sottogruppi normali di G .

Esercizio 3. Sia R un anello con identità.

(a) Si dica cosa si intende per *sottoanello fondamentale* P di R .

(b) Si dimostri che se R ha caratteristica 0, allora $P \cong \mathbb{Z}$, mentre se R ha caratteristica $n \neq 0$, allora $P \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Sia $M_2(\mathbb{R})$ l'anello delle matrici 2×2 ad elementi nel campo reale \mathbb{R} . Sia R il sottoanello di $M_2(\mathbb{R})$ costituito da tutte le matrici triangolari superiori ad elementi interi, ossia da tutte le matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Sia

$$\varphi: R \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

l'applicazione definita da

$$\varphi: \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto (a + 2\mathbb{Z}, c + 3\mathbb{Z})$$

per ogni $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(a) L'applicazione φ è un omomorfismo di anelli?

(b) Si determini il nucleo $\ker \varphi$ di φ .

(c) Si determini la caratteristica di $R/\ker \varphi$.