

Esame di Algebra 1 del 22 febbraio 2012

Esercizio 1 Siano A, B, C insiemi non vuoti ed $f: A \rightarrow B$ un'applicazione. Siano A^C e B^C l'insieme di tutte le applicazioni di C in A e di C in B , rispettivamente. Si definisca un'applicazione $\varphi: A^C \rightarrow B^C$ ponendo $\varphi(h) = f \circ h$ per ogni $h \in A^C$.

- (a) Si dimostri che se f è iniettiva, allora φ è iniettiva.
- (b) Si dimostri che se f è suriettiva, allora φ è suriettiva.

Esercizio 2 Sia \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'insieme delle parti di \mathbb{N} , parzialmente ordinato dall'inclusione. Sia A l'insieme dei sottoinsiemi di \mathbb{N} che sono finiti o cofiniti, ossia

$$A = \{ X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ è un insieme finito} \} \cup \{ X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ è un insieme finito} \}.$$

- (a) Si dimostri che A è un sottoreticolo del reticolo $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- (b) Il reticolo A è distributivo?
- (c) il reticolo A è limitato? Complementato? di Boole?

Sia $\mathbb{P} = \{ \{2n\} \mid n \in \mathbb{N} \}$, di modo che $\mathbb{P} \subseteq A$.

- (d) Si determini, se esiste, il minimo di \mathbb{P} .
- (e) Si determini, se esiste, l'estremo superiore di \mathbb{P} in A .

Esercizio 3 Si dimostri che ogni grafo finito ha un numero pari di vertici dispari.

Esercizio 4 Si consideri il gruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\},$$

con la moltiplicazione righe per colonne. Sia

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\}.$$

- (a) Si dimostri che H è sottogruppo normale di G .
- (b) Si dimostri che G/H è isomorfo al gruppo moltiplicativo \mathbb{R}^* dei numeri reali non nulli.

Esercizio 5 Sia $\mathbb{R}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x . Sia $I = \{ f \in \mathbb{R}[x] \mid f(2) = 0 \text{ e } f(5) = 0 \}$.

- (a) Si dimostri che I è un ideale di $\mathbb{R}[x]$.
- (b) Si dimostri che l'ideale I non è primo.
- (c) Si dimostri che l'ideale I di $\mathbb{R}[x]$ è principale esibendo un generatore di I .