Compito scritto di Algebra 1

14 settembre 2015

Esercizio 1. (a) Si completi la seguente definizione. “Siano a, b due numeri interi. Un numero intero d si dice un *massimo comun divisore* di a e b se ...”

(b) Siano a, b due numeri interi non entrambi nulli. Si dimostri che esiste un massimo comun divisore d di a e b, e che esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tali che $d = \alpha a + \beta b$.

Esercizio 2. Nel gruppo simmetrico S_{10} si considerino i cicli $f = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ e $g = (3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)$.

(a) Si calcoli la permutazione $h = f \circ g$.

(b) Si scriva h come prodotto di cicli disgiunti.

(c) Si calcoli la segnatura di h.

(d) Si scriva h come prodotto di trasposizioni.

Esercizio 3. Siano N, N' sottogruppi normali di un gruppo G. Sia $NN' = \{\, nn' \mid n \in N,\ n' \in N' \,\}$.

(a) Si dimostri che NN' è un sottogruppo di G.

(b) Si dimostri che NN' è normale in G.

Esercizio 4. Si consideri l’anello $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$, i cui elementi sono tutte le matrici del tipo $\begin{pmatrix} n & \alpha \\ 0 & m \end{pmatrix}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$. L’anello R è un sottoanello dell’anello delle matrici 2×2 ad elementi reali.

(a) Si determinino gli elementi invertibili di R.

(b) Quanti sono tali elementi invertibili?

Esercizio 5. Sia R un anello commutativo con identità.

(a) Si dica cosa si intende per *ideale massimale* di R.

(b) Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) R è un campo;

(2) $\{0\}$ è ideale massimale di R;

(3) gli ideali di R sono solo $\{0\}$ ed R.

Ogni risposta deve essere giustificata.