Esame scritto di Algebra 1 del 15 settembre 2014

Esercizio 1. Sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato, sia $a \in A$ e sia $B \subseteq A$. Si dica cosa vuol dire che:
(a) a è un minorante di B in A;
(b) a è un minimo di B;
(c) a è un estremo inferiore di B in A.
(d) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ parzialmente ordinato dall'inclusione $\subseteq$. Sia $B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$. Si calcoli l'estremo inferiore di B in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Esercizio 2. Sia $f\colon G \to G'$ un omomorfismo di gruppi moltiplicativi.
(a) Si definiscano il nucleo $\ker(f)$ di f e l'immagine $f(G)$ di f.
(b) Si dimostri che se $H \leq G$, allora $f^{-1}(f(H)) = H\ker(f)$.
(c) Si dimostri che se $H' \leq G'$, allora $f(f^{-1}(H')) = H' \cap f(G))$.

Esercizio 3. Sia R l'anello delle matrici

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Si verifichi che $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z} \right\}$ è un ideale di R.
(b) Si verifichi che I è l'insieme degli elementi nilpotenti di R. (Un elemento r di un anello R si dice *nilpotente* se esiste un intero $n \geq 1$ tale che $r^n = 0_R$.)
(c) L'anello quoziente R/I è commutativo? È un dominio d'integrità?

Esercizio 4. Dati gli anelli con identità R ed S, si consideri l'anello prodotto diretto $R \times S$ (le operazioni sono definite per componenti). Si dimostri che:
(a) se almeno uno tra gli anelli R e S ha caratteristica 0, allora l'anello $R \times S$ ha caratteristica 0;
(b) se R e S hanno entrambi caratteristica positiva m ed n rispettivamente, allora l'anello $R \times S$ ha caratteristica eguale al minimo comune multiplo di m ed n.

Esercizio 5. Siano $(R, +, \cdot)$ un anello con identità ed $(\mathrm{End}(R), +, \circ)$ l'anello degli endomorfismi del gruppo abeliano $(R, +)$. Per ogni $r \in R$ sia $\lambda_r\colon R \to R$ l'applicazione definita da $\lambda_r(x) = rx$ per ogni $x \in R$.
(a) Si dimostri che l'applicazione $\lambda\colon R \to \mathrm{End}(R)$, definita da $\lambda(r) = \lambda_r$ per ogni $r \in R$, è un omomorfismo iniettivo di anelli.
(b) Si dimostri che λ è un isomorfismo di anelli se e solo se $f(x) = f(1_R)x$ per ogni $f \in \mathrm{End}(R)$ e ogni $x \in R$.
(c) Si dimostri che l'anello $\mathrm{End}(R)$ è commutativo se e solo se R è un anello commutativo ed $\mathrm{End}(R)$ è isomorfo a R.

Ogni risposta deve essere giustificata.