

## Esame di Algebra 1

12 settembre 2017

**Esercizio 1.** (a) Si determini *mediante l'algoritmo di Euclide* il MCD positivo  $d$  di 64 e 31.

(b) Si determinino due interi  $\alpha, \beta$  tali che  $\alpha \cdot 64 + \beta \cdot 31 = d$ .

**Esercizio 2.** Siano  $(A, \leq)$  e  $(B, \leq)$  insiemi parzialmente ordinati. Definiamo la relazione  $\leq$  su  $A \times B$  in questo modo:  $(a, b) \leq (a', b')$  se e solo se o  $a \neq a'$  e  $a \leq a'$ , oppure  $a = a'$  e  $b \leq b'$ . È possibile dimostrare che  $(A \times B, \leq)$  è un insieme parzialmente ordinato (detto il *prodotto lessicografico* di  $(A, \leq)$  e  $(B, \leq)$ ).

Sia  $A = \mathbb{N}$  con l'ordine usuale e  $B = \{0, 1\}$  il suo sottoinsieme con l'ordine indotto.

(a) Si definisca un isomorfismo di insiemi parzialmente ordinati tra  $P = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$  con l'ordine lessicografico ed  $\mathbb{N}$ .

(b) Si consideri invece l'insieme  $P' = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$  con l'ordine lessicografico. Si calcoli l'estremo superiore del sottoinsieme  $\{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  in  $P'$ .

**Esercizio 3.** Se  $G$  è un gruppo ed  $A, B$  sono sottoinsiemi di  $G$ , poniamo  $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ .

(a) Siano  $A, B$  sottogruppi di un gruppo  $G$ . Si dimostri che  $AB = BA$  se e solo se  $AB$  è un sottogruppo di  $G$ .

(b) Siano  $A, B$  sottogruppi di un gruppo  $G$ . Si dimostri che se  $A$  è normale in  $G$ , allora  $AB = BA$ .

**Esercizio 4.** Si dimostri che se  $f: G \rightarrow G'$  è un omomorfismo di gruppi ed  $H$  è un sottogruppo di  $G$ , allora  $f^{-1}(f(H)) = H \ker(f)$ .

**Esercizio 5.** Sia  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  l'anello degli interi di Gauss. Si consideri l'applicazione  $f: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  definita ponendo, per ogni  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $f(a + ib) = a + 2b + 5\mathbb{Z}$ .

(a) Si dimostri che  $f$  è omomorfismo di anelli.

(b) Si dimostri che  $f$  è suriettivo.

(c) Si dimostri che  $1 + i2 \in \ker(f)$ .