

## Prima prova di accertamento parziale di Algebra 1

26 novembre 2011

**Esercizio 1** Sia  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  l'applicazione definita da

$$f(z) = \begin{cases} \left(\frac{1}{z}\right)^2 & \text{se } z \neq 0, \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

- (a) L'applicazione  $f$  è iniettiva? suriettiva? biiettiva?
- (b) Si determini  $f^{-1}(\{1, 2\})$ .
- (c) Si determini  $f^{-1}(3)$ .

**Esercizio 2** Si dimostri che esistono infiniti numeri primi.

**Esercizio 3** La *successione di Fibonacci*  $a_n$ ,  $n \geq 0$ , si definisce ponendo  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ , e  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  per ogni numero intero  $n \geq 2$ . Si considerino le seguenti tre affermazioni:

- (1)  $\text{MCD}(a_n, a_{n-1}) = 2n$  per ogni  $n \geq 1$ ;
  - (2)  $\text{MCD}(a_n, a_{n-1}) = 1$  per ogni  $n \geq 1$ ;
  - (3)  $\text{MCD}(a_n, a_{n-1}) = a_n - a_{n-1}$  per ogni  $n \geq 1$ .
- (a) Si dimostri che due di queste affermazioni sono false.
  - (b) Si dimostri per induzione su  $n$  che la restante terza di queste tre affermazioni è vera.

**Esercizio 4** Sia  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  il prodotto cartesiano di  $\mathbb{Z}$  per  $\mathbb{Z}$ . Su  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  si definisca una relazione  $\sim$  ponendo, per ogni  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $(a, b) \sim (c, d)$  se  $a^3 + b = c^3 + d$ .

- (a) Si dimostri che  $\sim$  è una relazione di equivalenza su  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .
- (b) Si determini la classe di equivalenza  $[(0, 0)]_{\sim}$  di  $(0, 0)$  modulo  $\sim$ , e si dimostri che  $[(0, 0)]_{\sim}$  è equipotente a  $\mathbb{Z}$ .
- (c) Sia  $\preceq$  la relazione su  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  definita ponendo, per ogni  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $(a, b) \preceq (c, d)$  se  $a \leq c$  e  $b^2 \leq d^2$ . La relazione  $\preceq$  è un ordinamento parziale su  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ?

**Esercizio 5** Sia  $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$  l'insieme delle parti di  $\mathbb{Z}$ . Su  $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$  si definisca un'operazione di addizione  $+$  ponendo, per ogni  $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ,  $A + B = (A \cup B) \cap \mathbb{N}$ . L'insieme  $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$  con questa operazione di addizione  $+$

- (a) è un semigruppato?
- (b) è commutativo?
- (c) ha un'identità?