

Esame di ALGEBRA 1 - 14 dicembre 2009

Si risponda ai seguenti quesiti, giustificando la risposta.

Esercizio 1. Siano $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} . Si ordini parzialmente $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ mediante l'inclusione \subseteq . Sia $P = \{ \{2n\} \mid n \in \mathbb{N} \}$, di modo che P è sottoinsieme di $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.

- (a) Si calcoli, se esiste, l'estremo superiore di P in $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.
- (b) Si calcoli, se esiste, l'estremo inferiore di P in $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.

Esercizio 2. Sia S_7 il gruppo simmetrico su 7 oggetti, ossia il gruppo delle permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Sia

$$G = \{ \sigma \mid \sigma \in S_7, \sigma(\{1, 2\}) \subseteq \{1, 2\} \}.$$

- (a) Si dimostri che G è sottogruppo di S_7 .
- (b) Si calcoli l'ordine di G .
- (c) Si dimostri che G è isomorfo al prodotto diretto $S_2 \times S_5$.
- (d) Sia $A_7 \leq S_7$ il gruppo alterno. Si dimostri che $A_7 \cap G$ è sottogruppo normale di G di indice 2.

Esercizio 3. Sia I l'ideale di $\mathbb{Z}[x]$ generato da $\{4, 2x\}$, ossia il più piccolo ideale dell'anello dei polinomi $\mathbb{Z}[x]$ contenente i polinomi 4 e $2x$.

(a) Quali sono gli elementi di I ? (La risposta deve essere del tipo: Un polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ appartiene ad I se e solo se \dots , giustificando opportunamente.)

(b) Si calcoli la caratteristica dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[x]/I$.

Esercizio 4. (a) Si completi la seguente definizione.

“Un *dominio euclideo* è \dots ”

(b) Si dimostri che in un dominio euclideo ogni ideale è principale.

Esercizio 5. (a) Si dimostri che l'elemento $x^2 + x + \bar{1}$ dell'anello $\mathbb{Z}_2[x]$ è irriducibile.

(b) Sia I l'ideale principale di $\mathbb{Z}_2[x]$ generato da $x^2 + x + \bar{1}$. Si dica se $\mathbb{Z}_2[x]/I$ è un campo, giustificando la risposta.