

Chebfun

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

4 aprile 2016

Introduzione a Chebfun

In questa nota, descriveremo i comandi di base dell'ambiente Chebfun, di rilevante importanza per l'analisi numerica ed in particolare per la teoria dell'approssimazione.

Utilizzeremo tale ambiente per studiare in particolare alcuni problemi quali:

- interpolazione in nodi equispaziati;
- interpolazione in nodi di Chebyshev;
- migliore approssimazione con algoritmo di Remez.

Per una guida si consulti

<http://www.chebfun.org/docs/guide/>

mentre per installare l'ambiente in Matlab, si veda

<http://www.chebfun.org/download/>

Introduzione a Chebfun

Quanto faremo di seguito, è tratto ed adattato da

<http://www.chebfun.org/docs/guide/guide01.html>

L'idea di Chebfun consiste nell'idea che per rappresentare funzioni regolari spesso basta interpolare in 20 o 30 nodi di Chebyshev, ma che tale processo, qualora implementato adeguatamente, rimane stabile anche con migliaia o milioni di nodi di Chebyshev.

Avendo questo in mente, nella prima versione di Chebfun, ad una funzione f , l'ambiente `chebfun`, tramite procedure adattative, determinava il numero di punti $n + 1$ di Chebyshev per cui l'interpolante p_n era tale da approssimare f con un errore relativo di 10^{-15} .

Introduzione a Chebfun

Nelle versioni successive, l'ambiente è stato adeguato per poter trattare adeguatamente funzioni regolari a pezzi, determinando automaticamente i punti in cui suddividere l'approssimazione. Per capire questo punto, consideriamo la funzione

$$f(x) = |x - 0.3|$$

Digitiamo

```
f = chebfun('abs(x-.3)');
```

e otteniamo quale risposta

```
Warning: Function not resolved using 65537 pts. Have you tried 'splitting on'?
```

col significato che troppi punti vengono utilizzati per studiare la funzione f .

Introduzione a Chebfun

Se invece chiediamo all'ambiente chebfun di suddividere il dominio, il risultato migliora. Infatti

```
f = chebfun('abs(x-.3)','splitting','on');
```

non da' problemi. Per capire cosa sia successo e quali punti abbia usato chebfun, digitiamo

```
>> f
f =

    chebfun column (2 smooth pieces)
      interval      length      endpoint values
[      -1,      0.3]      2      1.3      0
[      0.3,      1]      2      0      0.7
vertical scale = 1.3      Total length = 4
>>
```

Evidentemente chebfun ha trovato il punto *critico* 0.3, e utilizzato l'interpolazione su due punti di Chebyshev scalati negli intervalli per determinare un'approssimazione della funzione f .

Esempio 1. Interpolazione in nodi equispaziati.

Consideriamo la funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

e digitiamo

```
>> x=chebfun('x'); % Inizializzazione.  
>> f=1./(1+25*x.^2); % RUNGE.  
>> f  
f =  
  
    chebfun column (1 smooth piece)  
      interval      length endpoint values  
[      -1,       1]      181      0.038      0.038  
vertical scale =    1  
>>
```

La funzione di Runge è stata approssimata con un errore relativo di 10^{-15} utilizzando 181 nodi di Chebyshev.

Esempio 1. Interpolazione in nodi equispaziati.

Digitiamo nel file `esempio1.m`

```
function [eequi, echeb]=esempio1

d = [-1, 1]; % INTERVALLO.
ff = @(x) 1./(1+25*x.^2); % FZ. RUNGE
f=chebfun(ff,d);
eequi=[];
echeb=[];
nn=1:1:100;
for n=nn
    x = linspace(d(1), d(2), n+1);
    p = chebfun.interpl(x, ff(x)); % INTERPOLAZIONE NEI NODI x.
    fc = chebfun(ff, n+1);
    eequi=[eequi norm(f-p,inf)];
    echeb=[echeb norm(f-fc,inf)];
end

clf;
semilogy(nn, eequi, 'r-');
pause;
semilogy(nn, echeb, 'r-');
```

e di seguito

```
>> [eequi, echeb]=esempio1;
```

Esempio 1. Interpolazione in nodi equispaziati.

Quale risultato abbiamo le seguenti figure.

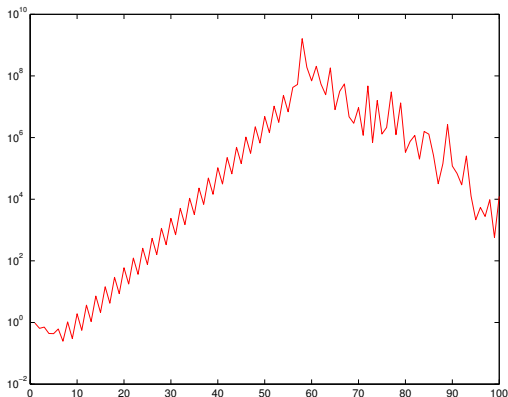


Figura : Grafico in scala semilogaritmica degli errori delle interpolanti in nodi equispaziati, al crescere del numero di nodi.

Esempio 1. Interpolazione in nodi equispaziati.

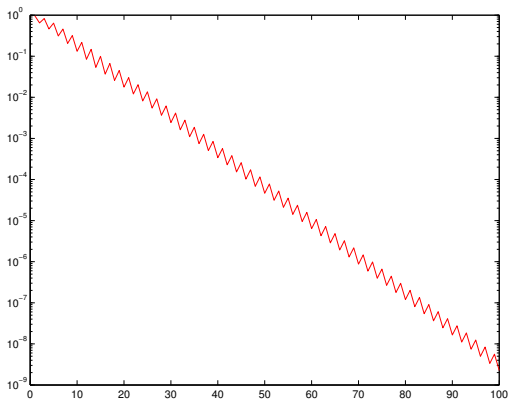


Figura : Grafico in scala semilogaritmica degli errori delle interpolanti in nodi di Chebyshev al crescere del numero di nodi.

Esempio 1. Interpolazione in nodi equispaziati.

I grafici mostrano che

- l'interpolazione in $n + 1$ nodi equispaziati fornisce polinomi p_n che non convergono alla funzione di Runge f ;
- l'interpolazione in $n + 1$ nodi di Chebyshev fornisce polinomi p_n che convergono alla funzione di Runge f .

Dal punto di vista della programmazione si noti che

- nella chiamata `f=chebfun(ff,d)`; si può dire in quale intervallo approssimare ff tramite funzioni polinomiali a tratti di tipo `chebfun`.
- nella chiamata `fc = chebfun(ff, n+1)`; si determina il polinomio di Chebyshev di grado n che interpola ff .
- nella chiamata `norm(f-p,inf)`; si approssima l'errore in norma infinito tra f e p .

Esercizio 1.

Esercizio (1)

Sapendo che l'errore in norma infinito dell'interpolante nei nodi di Chebyshev è asintoticamente del tipo $C\gamma^n$, determinare C e γ .

Suggerimento:

- *Calcolare il rapporto tra $e_n \approx C\gamma^n$ e $e_{n-2} \approx C\gamma^{n-2}$ e dedurre γ .*
- *Noto γ , calcolare C .*

Esercizio 2.

Esercizio (2)

Si modifichi la precedente routine così da studiare l'approssimazione, similmente all'esempio precedente, le funzioni

1 $f(x) = |x - 0.3|;$

2 $f(x) = \exp(x^2);$

3 $f(x) = \exp(x);$

4 $f(x) = \sin(x);$

5 $f(x) = \text{sinc}(x)$ dove $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ se $x \neq 0$, 1 se $x = 0$
(funzione predefinita in `chebfun`).

- Serve 'splitting', 'on'?
- Qual'è il numero di punti di Chebyshev affinché la funzione sia approssimata alla precisione di macchina in ogni esempio?

Esempio 2. Miglior approssimante in norma infinito.

Il comando `remez` di una funzione f definita tramite `chebfun` fornisce la miglior approssimante in norma infinito di f . Vediamo un esempio, salvato in [esempio2.m](#).

```
function esempio2

d = [-1, 1]; % INTERVALLO.
ff = @(x) 1./(1+25*x.^2);
f=chebfun(ff,d,'splitting','on');
n=10;
p = remez(f,n); % MIGLIOR APPROX GRADO n
fc = chebfun(ff, n+1); % INTP. CHEB.

eequi=norm(f-p,inf);
echeb=norm(f-fc,inf);

fprintf('\n\t REMEZ: %1.5e',eequi);
fprintf('\n\t CHEBYSHEV: %1.5e',echeb);
```

Esempio 2. Miglior approssimante in norma infinito.

Digitiamo quindi in workspace

```
>> esempio2;  
  
REMEZ: 6.59229e-02  
CHEBYSHEV: 1.32197e-01  
  
>>
```

- Come previsto la miglior approssimante di grado n offre risultati migliori dell'interpolante in $n + 1$ nodi di Chebyshev.
- D'altro canto la differenza non è molta, relativamente agli errori assoluti compiuti.
- Si noti che nella chiamata `f=chebfun(ff,d,'splitting','on');` si può dire in quale intervallo approssimare ff tramite funzioni polinomiali a tratti.
- Si noti che nella chiamata `fc = chebfun(ff, n+1);` si determina il polinomio di Chebyshev di grado n che interpola ff .

Esercizio 3.

Esercizio (3)

Si modifichi la routine esempio1.m utilizzando quanto visto in esempio2.m, così da paragonare la miglior approssimante di grado n con l'interpolante in $n + 1$ nodi di Chebyshev, relativamente alle funzioni

1 $f(x) = |x - 0.3|;$

2 $f(x) = \exp(x^2);$

3 $f(x) = \exp(x);$

4 $f(x) = \sin(x);$

5 $f(x) = \text{sinc}(x)$ dove $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ se $x \neq 0$, 1 se $x = 0$
(funzione predefinita in chebfun).

Esercizio 3.

- Serve 'splitting', 'on'?
- *Negli esempi forniti è molta la differenza tra l'usare l'interpolante in nodi di Chebyshev e la miglior approssimante?*

Esempio 3. Costanti di Lebesgue.

Dalla teoria è noto che asintoticamente la crescita della costante di Lebesgue in nodi di

- Chebyshev, unisolventi a grado n è

$$\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi}(\log(n) + \gamma + \log(\frac{8}{\pi}))$$

dove $\gamma =$

0.57721566490153286060651209008240243104215933593992

è la costante di Eulero-Mascheroni.

- nodi equispaziati, unisolventi a grado n è

$$\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{\exp(1) n \log(n)}$$

Esempio 3. Costanti di Lebesgue.

Lo verifichiamo tramite un esempio, salvato in [esempio3.m](#)

```
function esempio3

fprintf('\n \t COSTANTI DI LEBESGUE, NODI CHEBYSHEV');
max_deg=50;
em=0.57721566490153286060651209008240243104215933593992; %EULERO-MASCHERONI
for deg=1:max_deg
    x=chebpts(deg); % PUNTI DI CHEB. IN CHEBFUN.
    [L,Lconst]=lebesgue(x); % FUNZIONE E COSTANTE DI LEBESGUE.
    lebesgue_constants(deg)=Lconst;
    est(deg)=(2/pi)*(log(deg+1)+em+log(8/pi)); % STIMA COSTANTE LEBESGUE.
    fprintf('\n \t DEG: %3.0f LEBESGUE CONST.: %1.4e EST.:% 1.4e',...
        deg,Lconst,est(deg));
end

plot(1:max_deg,lebesgue_constants,'ro-');
```

Esempio 3. Costanti di Lebesgue.

Come risultato otteniamo

```
COSTANTI DI LEBESGUE, NODI CHEBYSHEV
DEG:  1 LEBESGUE CONST.: 1.0000e+00 EST.: 1.4038e+00
DEG:  2 LEBESGUE CONST.: 1.0000e+00 EST.: 1.6619e+00
DEG:  3 LEBESGUE CONST.: 1.2500e+00 EST.: 1.8451e+00
DEG:  4 LEBESGUE CONST.: 1.6667e+00 EST.: 1.9871e+00
DEG:  5 LEBESGUE CONST.: 1.7988e+00 EST.: 2.1032e+00
DEG:  6 LEBESGUE CONST.: 1.9889e+00 EST.: 2.2013e+00
DEG:  7 LEBESGUE CONST.: 2.0826e+00 EST.: 2.2863e+00
DEG:  8 LEBESGUE CONST.: 2.2022e+00 EST.: 2.3613e+00
DEG:  9 LEBESGUE CONST.: 2.2747e+00 EST.: 2.4284e+00
DEG: 10 LEBESGUE CONST.: 2.3619e+00 EST.: 2.4891e+00
DEG: 11 LEBESGUE CONST.: 2.4210e+00 EST.: 2.5445e+00
DEG: 12 LEBESGUE CONST.: 2.4894e+00 EST.: 2.5954e+00
```

.

```
DEG: 40 LEBESGUE CONST.: 3.2948e+00 EST.: 3.3267e+00
DEG: 41 LEBESGUE CONST.: 3.3105e+00 EST.: 3.3420e+00
DEG: 42 LEBESGUE CONST.: 3.3267e+00 EST.: 3.3570e+00
DEG: 43 LEBESGUE CONST.: 3.3416e+00 EST.: 3.3716e+00
DEG: 44 LEBESGUE CONST.: 3.3570e+00 EST.: 3.3859e+00
DEG: 45 LEBESGUE CONST.: 3.3712e+00 EST.: 3.3999e+00
DEG: 46 LEBESGUE CONST.: 3.3859e+00 EST.: 3.4136e+00
DEG: 47 LEBESGUE CONST.: 3.3996e+00 EST.: 3.4270e+00
DEG: 48 LEBESGUE CONST.: 3.4136e+00 EST.: 3.4401e+00
DEG: 49 LEBESGUE CONST.: 3.4267e+00 EST.: 3.4530e+00
DEG: 50 LEBESGUE CONST.: 3.4402e+00 EST.: 3.4656e+00
```

Esempio 3. Costanti di Lebesgue.

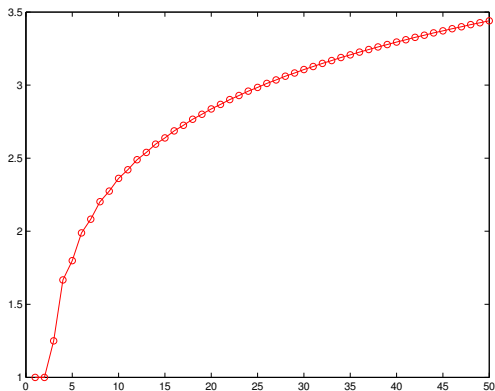


Figura : Grafico della costante di Lebesgue dei nodi di Chebyshev, per gradi compresi tra 1 e 50.

Esercizio 4.

Esercizio (4)

Verificare che per nodi equispaziati, unisolventi a grado n , per $n = 1, \dots, 50$ si ha che

$$\frac{2^{n-2}}{n^2} \leq \Lambda_n \leq \frac{2^{n+3}}{n}$$

come stabilito in *Two results on Polynomial Interpolation in Equally Spaced Points*, da Trefethen e Weideman, J.A.T. (65), 247-260 (1991).

E' buona la stima asintotica $\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{\exp(1) n \log(n)}$?

Suggerimento:

- Modificare l'esempio 3,
- ricordare il comando `linspace`.

Approssimazione con polinomi trigonometrici e Chebfun.

Dalla release di Chebfun 5, Chebfun è in grado di trattare polinomi trigonometrici invece di algebrici, come descritto nella guida [Periodic Chebfun](#). Quindi si approssima una generica funzione “ u ” (di default in $[-\pi, \pi]$), tramite serie troncate

$$q_N(t) = \begin{cases} \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} a_k \exp(ikt), & \text{se } N \text{ dispari,} \\ \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k \exp(ikt), & \text{se } N \text{ pari,} \end{cases}$$

dove

$$a_k \approx c_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(t_j) \exp(-ikt_j), \quad t_j = -\pi + 2\pi j/N.$$

con c_k calcolati in $O(N \log(N))$ operazioni con la **Fast Fourier Transform**.

Approssimazione con polinomi trigonometrici e Chebfun.

Quale esempio trattiamo la funzione $\tanh(3 \sin(t)) - \sin(t + \frac{1}{2})$

```
>> f=chebfun(@(t) tanh(3*sin(t))-sin(t+1/2), [-pi pi])
f =
    chebfun column (1 smooth piece)
      interval      length      endpoint values
[    -3.1,      3.1]      226      0.48      0.48
vertical scale = 0.92

>> format long e
>> f(-pi)
ans =
    4.794255386042027e-01
>> f(pi)
ans =
    4.794255386042033e-01
>> plot(f, 'LineWidth', 1.6)
```

E' stato quindi necessario determinare un certo polinomio algebrico di grado 225 (interpolante 226 punti di Chebyshev), per avere un errore dell'ordine della precisione di macchina.

Approssimazione con polinomi trigonometrici e Chebfun.

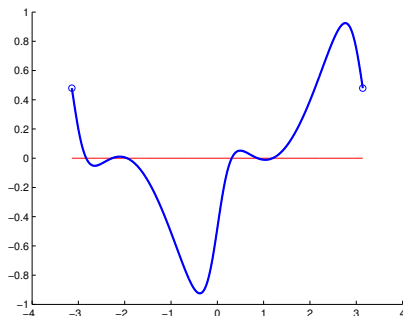


Figura : Grafico della funzione periodica $u(x) = \tanh(3 \sin(t)) - \sin(t + \frac{1}{2})$ in cui $u(-\pi) = u(\pi) \approx 4.794255386042033e - 01$.

Approssimazione con polinomi trigonometrici e Chebfun.

Approssimiamo ora con polinomi trigonometrici, aggiungendo alla chiamata `chebfun`, la preferenza `'trig'`.

```
>> f=chebfun(@(t) tanh(3*sin(t))-sin(t+1/2), [-pi pi], 'trig')
f =
  chebfun column (1 smooth piece)
      interval      length  endpoint values trig
[   -3.1,    3.1]    147    0.48    0.48
vertical scale = 0.92
>>
```

E' stato quindi necessario determinare un certo polinomio trigonometrico interpolante la funzione in 147 punti equispaziati di $[-\pi, \pi]$, per avere un errore dell'ordine della precisione di macchina, contro i 226 del polinomio algebrico precedentemente ottenuto.

Approssimazione con polinomi trigonometrici e Chebfun.

Nota.

Si noti che per funzioni periodiche regolari, questo deriva dal fatto che

- *interpolanti trigonometriche hanno un potere risolutivo di 2 punti per lunghezza d'onda,*
- *le interpolanti di Chebyshev hanno un potere risolutivo di π punti per lunghezza d'onda,*

che tradotto altrimenti dice che con polinomi trigonometrici ci si aspetta meno campionamenti rispetto alle classiche chebfun.

Approssimazione con polinomi trigonometrici e Chebfun.

Cambiamo funzione, e consideriamo $f(x) = 5 \sin(3t) + 6 \cos(2t)$.

```
>> f=chebfun(@(t) 5*sin(3*t)+6*cos(2*t), [-pi pi], 'trig')
f =
    chebfun column (1 smooth piece)
      interval      length      endpoint values      trig
[    -3.1,      3.1]          7          6          6
vertical scale = 9.3
>>
```

Viene da domandarsi quale sia il polinomio trigonometrico ottenuto. Essendo facilmente dall'identità di Eulero

$$\sin(kt) = \frac{i \cdot (\exp(-ikt) - \exp(ikt))}{2}, \quad \cos(kt) = \frac{\exp(ikt) + \exp(-ikt)}{2}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} f(t) &= 5 \sin(3 \cdot t) + 6 \cos(2 \cdot t) \\ &= 5 \cdot \frac{\exp(i3t) - \exp(-i3t)}{2} + 6 \cdot \frac{\exp(i2t) + \exp(-i2t)}{2} \\ &= (5i/2) \exp(-i3t) + 3 \exp(-i2t) + 3 \exp(i2t) - (5i/2) \exp(i3t). \end{aligned}$$

Approssimazione con polinomi trigonometrici e Chebfun.

Utilizzando il comando `trigcoeffs`, che determina i coefficienti di Fourier discreti $c_k^* = c_{-M-1+k}$, con $M = (N - 1)/2$ se N dispari o $M = N/2$ se N pari,

```
>> trigcoeffs(f)

ans =
  4.762103912697982e-18 + 2.500000000000000e+00i
  2.999999999999999e+00 - 4.598694340586186e-17i
  7.446384377092827e-16 + 1.360023205165817e-15i
  7.216449660063518e-16 + 0.000000000000000e+00i
  7.446384377092827e-16 - 1.360023205165817e-15i
  2.999999999999999e+00 + 4.598694340586186e-17i
  4.762103912697982e-18 - 2.500000000000000e+00i

>>
```

e quindi i coefficienti sono, tolte le quantità quasi nulle,

$$[2.5i, 3, 0, 0, 0, 3, -2.5i]$$

come richiesto, in quanto

$$f(t) = (5i/2) \exp(-i3t) + 3 \exp(-i2t) + 3 \exp(i2t) - (5i/2) \exp(i3t).$$

Esempio 4. Fenomeno di Gibbs.

Si consideri la funzione $\text{sign}(x)$ e ci si proponga di approssimarla con polinomi trigonometrici. Utilizziamo il codice

```
function esempio4
warning off;

N1=10; f1=chebfun(@(t) -sign(abs(t)-pi/2),[-pi pi], 'trunc', N1, 'trig'); maxN1=
    max(f1);

N2=30; f2=chebfun(@(t) -sign(abs(t)-pi/2),[-pi pi], 'trunc', N2, 'trig'); maxN2=
    max(f2);

N3=5000; f3=chebfun(@(t) -sign(abs(t)-pi/2),[-pi pi], 'trunc', N3, 'trig'); maxN3=
    max(f3);

fprintf('\n \t GIBBS SIZE (%3.0f): %1.5e', N1, maxN1)
fprintf('\n \t GIBBS SIZE (%3.0f): %1.5e', N2, maxN2)
fprintf('\n \t GIBBS SIZE (%3.0f): %1.5e', N3, maxN3)

xx=linspace(-pi, pi, 1000); yy=-sign(abs(xx)-pi/2);

clf; hold on; plot(xx, yy, 'r-'); plot(f1, 'k-', 'LineWidth', 2); hold off;
fprintf('\n \t PAUSE'); pause;

clf; hold on; plot(xx, yy, 'r-'); plot(f2, 'k-', 'LineWidth', 2); hold off;
fprintf('\n \t PAUSE'); pause;

clf; hold on; plot(xx, yy, 'r-'); plot(f3, 'k-', 'LineWidth', 2); hold off;
```

Esempio 4. Fenomeno di Gibbs.

Otteniamo

```
>> esempio4  
  
GIBBS SIZE ( 10): 1.18836e+00  
GIBBS SIZE ( 30): 1.18028e+00  
GIBBS SIZE (5000): 1.17801e+00  
PAUSE  
PAUSE  
PAUSE  
  
>>
```

e tre grafici con delle gobbe sorprendenti, circa della stessa altezza (appunto $1.18836e + 00$, $1.18028e + 00$ e $1.17801e + 00$ per interpolanti trigonometriche in cui $N = 10$, $N = 30$, $N = 50$).

Esempio 4. Fenomeno di Gibbs.

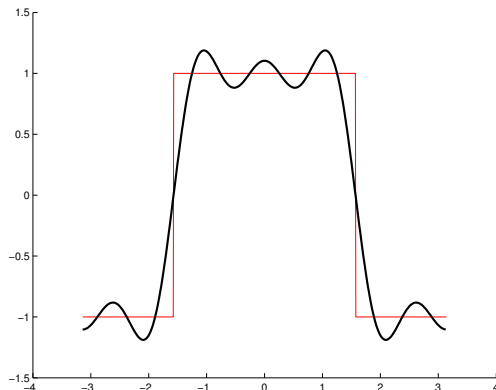


Figura : Grafico della funzione $-sign(|t| - \pi/2)$ in $[-\pi, \pi]$ e interpolante trigonometrica con $N = 10$.

Esempio 4. Fenomeno di Gibbs.

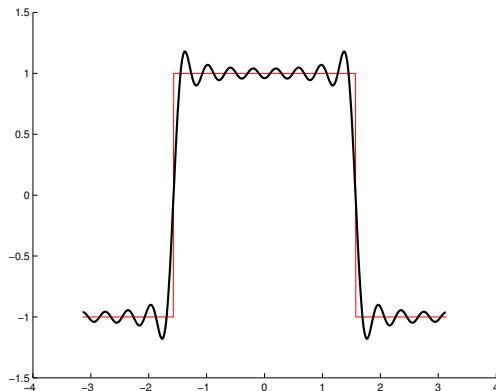


Figura : Grafico della funzione $-sign(|t| - \pi/2)$ in $[-\pi, \pi]$ e interpolante trigonometrica con $N = 30$.

Esempio 4. Fenomeno di Gibbs.

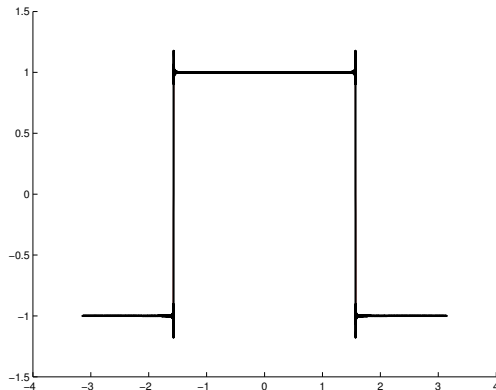


Figura : Grafico della funzione $-sign(|t| - \pi/2)$ in $[-\pi, \pi]$ e interpolante trigonometrica con $N = 5000$.

Esempio 4. Fenomeno di Gibbs.

Questo fenomeno, detto **di Gibbs** (1899) anche se scoperto nel 1848 da Wilbraham, mostra un problema nell'approssimare mediante serie di Fourier funzioni con salti, pur essendo in $L_2(-\pi, \pi)$.

Problema:

- se così fosse, al variare dei nodi, si può avere la convergenza in norma infinito?
- se così fosse, al variare dei nodi, si può avere la convergenza in norma 2?

Esempio 4. Fenomeno di Gibbs.

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua a tratti e differenziabile, di periodo L

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^N a_k \exp\left(\frac{2\pi i N x}{L}\right)$$

e

$$a = f(x_0^+) - f(x_0^-) \neq 0$$

allora

- $\lim_N S_N f(x_0^+ + \frac{L}{2N}) = f(x_0^+) + a \cdot 0.089490$
- $\lim_N S_N f(x_0^- - \frac{L}{2N}) = f(x_0^-) - a \cdot 0.089490.$
- $\lim_N S_N f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$

Le quantità precedentemente calcolate sono dell'ordine predetto da questi teoremi?

Esercizio 5.

Esercizio (5)

Cosa succede se invece di polinomi trigonometrici, si approssima la funzione

$$f(t) = -\text{sign}(|t| - \pi/2)$$

in $[-\pi, \pi]$ con polinomi algebrici di grado 10, 30, 50 via Chebfun?

Esercizio Facoltativo.

Esercizio (Facoltativo)

Che errore si compie in norma ∞ e in norma 2, approssimando la funzione

$$f(t) = \log(0.001 + t), \quad t \in [0, 1]$$

con

- *polinomi algebrici di grado 10, 30, 50 via Chebfun?*
- *polinomi trigonometrici di grado 10, 30, 50 via Chebfun?*

Quale delle due approssimazioni è migliore?