

MIGLIOR APPROSSIMAZIONE IN SPAZI EUCLIDEI *

A. SOMMARIVA[†]

Conoscenze richieste. Spazio vettoriale. Spazio normato. Vettori linearmente indipendenti. Sistemi lineari. Operatore delta di Kronecker.

Conoscenze ottenute. Spazi euclidei. Elemento di miglior approssimazione in un sottospazio di dimensione finita di uno spazio euclideo. Determinazione dei coefficienti di Fourier per basi generiche e ortogonali.

1. Introduzione. Cominciamo introducendo qualche definizione.

DEFINIZIONE 1.1 (Spazio euclideo). *Uno spazio vettoriale E dotato di un prodotto interno $(\cdot, \cdot)$, cioè una funzione reale definita sulle coppie $x, y \in E$ con le seguenti proprietà*

1. $(x, x) \geq 0$ per ogni $x \in E$; inoltre $(x, x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
2. $(x, y) = (y, x)$ per ogni $x, y \in E$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ per ogni $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;
4. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ per ogni $x, y, z \in E$.

si dice **spazio euclideo**.

A partire dal prodotto interno si può definire lo spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ ponendo $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Vediamo alcuni esempi di spazi euclidei:

- $\mathbb{R}^n$ dotato dell'usuale prodotto scalare, è uno spazio euclideo; se $e_1, \dots, e_n$ è una base ortonormale, cioè per cui $(e_j, e_k) = \delta_{j,k}$ (dove al solito $\delta_{j,k}$ è il delta di Kronecker), allora ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere come

$$x = \sum_{k=1}^n c_k e_k, \quad c_k = (x, e_k).$$

Infatti, moltiplicando ambo i membri di x per e_k si ha per la bilinearità del prodotto scalare

$$(x, e_k) = \left(\sum_{n=1}^n c_n e_n, e_k \right) = \sum_{n=1}^n c_n (e_n, e_k) = c_k (e_k, e_k) = c_k.$$

- lo spazio $C([a, b])$ delle funzioni continue nel compatto $[a, b]$, dotato del prodotto scalare

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

è uno spazio euclideo, cf. [8, p.145].

- lo spazio $L^2_{\mathbb{R}}([a, b])$ lo spazio delle **funzioni misurabili** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $[a, b]$ compatto e tali che $|f|^2$ sia integrabile (cf.[4, p.5]), dotato del prodotto scalare

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

*Ultima revisione: 14 marzo 2017

[†]Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Padova, stanza 419, via Trieste 63, 35121 Padova, Italia (alvise@math.unipd.it). Telefono: +39-049-8271350.

è uno spazio euclideo *completo*, cioè ogni **successione di Cauchy** è convergente cf. [8, p.145].

- lo spazio $L^2_{\mathbb{C}}([a, b])$ lo spazio delle funzioni misurabili $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ con $[a, b]$ compatto e tali che $|f|^2$ sia integrabile (cf.[4, p.5]), dotato del prodotto scalare

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

è uno spazio euclideo *completo*, cf. (cf.[4, p.5]).

Ricordiamo che se $z = a + i \cdot b$ allora $\bar{z} = a - i \cdot b$ e $\bar{z}$ si chiama il **coniugio** di z .

TEOREMA 1.1 (Pitagora). *Sia E uno spazio euclideo, e siano $f, g \in E$ tali che $(f, g) = 0$ (cioè f e g sono ortogonali). Allora $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.*

DIMOSTRAZIONE. 1.1. *Essendo $(f, g) = 0$, dalla bilinearità del prodotto interno,*

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= (f + g, f + g) = (f, f) + (g, f) + (f, g) + (g, g) \\ &= (f, f) + 0 + 0 + (g, g) \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 \end{aligned}$$

NOTAZIONE. 1.1. *Denoteremo con $\langle \phi_k \rangle_{k=1, \dots, N}$ lo spazio vettoriale definito da $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, N}$.*

TEOREMA 1.2 (Proiezione ortogonale). *Sia $f \in E$, E spazio euclideo e $\{\phi_j\}_{j=1, \dots, N}$ un sistema finito di elementi di E lin. indipendenti. Allora $f^* = \sum_{j=1, \dots, N} c_j^* \phi_j$ è la soluzione del problema*

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{g \in \langle \phi_k \rangle_{k=1, \dots, N}} \|f - g\|_2$$

dove i coefficienti c_j^* verificano le cosiddette **equazioni normali**

$$\sum_{k=1}^N (\phi_j, \phi_k) c_k^* = (\phi_j, f), \quad j = 1, \dots, N.$$

La soluzione è caratterizzata dalla proprietà di ortogonalità cioè che $f^ - f$ è ortogonale a tutti gli ϕ_k , con $k = 1, \dots, N$ o equivalentemente*

$$(f^*, \phi_k) = (f, \phi_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

DIMOSTRAZIONE. 1.2.

- Supponiamo che per un certo $f^* = \sum_{j=1, \dots, N} c_j^* \phi_j$ si abbia che $f^* - f$ sia ortogonale a tutti i ϕ_k (e quindi a ogni loro combinazione lineare).
- Supponiamo $f^\circ \neq f^*$ sia l'elemento di migliore approssimazione.

Allora, visto che $f - f^$ è ortogonale a $f^* - f^\circ \in \langle \phi_k \rangle$, utilizzando il teorema di Pitagora*

$$\begin{aligned} \|f - f^\circ\|^2 &= \|(f - f^*) + (f^* - f^\circ)\|^2 \\ &= \|f - f^*\|^2 + \|f^* - f^\circ\|^2 > \|f - f^*\|^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

e quindi f° non può essere l'elemento di miglior approssimazione.

Di conseguenza se $f^* \in \langle \phi_k \rangle_{k=1, \dots, N}$ e $f^* - f$ è ortogonale a tutti i ϕ_k allora f^* è la miglior approssimazione di f in $\langle \phi_k \rangle_{k=1, \dots, N}$. Rimane allora da mostrare che le condizioni di ortogonalità

$$\left(\sum_{j=1}^N c_j^* \phi_j - f, \phi_k \right) = 0, \quad k = 1, \dots, N$$

sono soddisfatte per un qualche (unico!) $c^* = (c_j)_{j=1, \dots, N}$.

Questo problema è equivalente alla esistenza della soluzione del sistema di equazioni normali

$$\sum_{k=1}^N (\phi_j, \phi_k) c_k^* = (\phi_j, f), \quad j = 1, \dots, N \quad (1.3)$$

cioè che la matrice $G = (G_{i,j})_{i,j} = ((\phi_j, \phi_k))_{i,j}$ è non singolare. Si vede facilmente che la matrice (di Gram) G è definita positiva e quindi non singolare. Infatti, se $v = (v_i) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $G_{i,j} = (\phi_i, \phi_j)$, $u = \sum_i v_i \phi_i \neq 0$

$$\begin{aligned} v^T \cdot G \cdot v &= v^T \cdot \sum_j v_j (\phi_i, \phi_j) = v^T \cdot (\phi_i, \sum_j v_j \phi_j) \\ &= \sum_i v_i (\phi_i, \sum_j v_j \phi_j) = (\sum_i v_i \phi_i, \sum_j v_j \phi_j) \\ &= (u, u) > 0. \end{aligned}$$

Quindi esiste f^* , di miglior approssimazione, ed è tale che $f^* - f$ è ortogonale a ϕ_k per $k = 1, \dots, N$.

NOTA. 1.1. Osserviamo ora che

- **se non si possiede una base ortogonale** $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, N}$ *allora per ottenere l'elemento di miglior approssimazione, bisogna*
 - Disporre dei prodotti scalari (ϕ_j, ϕ_k) per $j, k = 1, \dots, N$ e di (ϕ_j, f) per $j = 1, \dots, N$.
 - Con i valori (ϕ_j, ϕ_k) si forma la **matrice simmetrica (e definita positiva!) di Gram** le cui componenti sono $G_{j,k} = (\phi_j, \phi_k)$,
 - con $b_j = (\phi_j, f)$ si definisce il termine noto b del sistema $Gc = b$,
 - si **risolve quindi tale sistema lineare**, la cui soluzione fornisce le componenti (c_j^*) dell'elemento di miglior approssimazione $\sum_j c_j^* \phi_j$.
- **se non si possiede una base ortogonale** $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, N}$ *allora il calcolo della miglior approssimazione non richiede la soluzione del sistema delle equazioni normali, bensì da*

$$c_k^* = \frac{(\phi_k, f)}{(\phi_k, \phi_k)}$$

il solo calcolo di alcuni prodotti interni e N divisioni.

Inoltre si noti che se $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, N}$ è un sistema ortogonale, allora

- i coefficienti di Fourier c_j^* sono indipendenti da N ;

- tale indipendenza offre il vantaggio che se è necessario aumentare il numero totale di parametri c_j^* , non è necessario ricalcolare quelli precedentemente ottenuti.

ESEMPIO 1.1. Un caso importante è quello in cui $\{\phi_j\}_{j=1,\dots,N}$ è un **sistema ortogonale**, cioè

$$(\phi_j, \phi_k) = c_j \delta_{j,k}, \quad c_j \neq 0,$$

dove al solito $\delta_{j,k}$ denota il delta di Kronecker; allora i coefficienti c_j^* (detti in questo caso di Fourier) sono calcolabili più semplicemente con la formula

$$c_j^* = \frac{(f, \phi_j)}{(\phi_j, \phi_j)}, \quad j = 1, \dots, N.$$

PROBLEMA. 1.1.

A questo punto supponiamo che sia $S_0 \subset \dots \subset S_n \subset \dots \subseteq E$. Ci si domanda se per una qualsiasi $f \in E$ si abbia che $\lim_n E_n(f) = 0$. Abbiamo visto che questo equivale a stabilire che $\cup_n S_n$ è denso in E .

Al momento non abbiamo detto nulla riguardo una possibile base dello spazio euclideo E .

- Cosa serve richiedere ad E perchè esista una base, magari con cardinalità numerabile?
- Come ottenere basi ortonormali da una base arbitraria?

DEFINIZIONE 1.2 (Separabile). Uno spazio euclideo E si dice **separabile** se e solo se contiene un sottinsieme $S \subseteq X$ denso e numerabile, cf. [8, p.48].

TEOREMA 1.3. Uno spazio euclideo separabile ha una base ortonormale $\{\phi_k\}_k$ finita o numerabile, cioè tale che $(\phi_j, \phi_k) = \delta_{j,k}$ e se $x \in E$ allora si può scrivere formalmente

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \phi_k$$

per certi $\{c_k\}$, intendendo che $\lim_n \|x - \sum_{k=0}^n c_k \phi_k\| = 0$.

Inoltre vale il seguente teorema, basato sull'algoritmo di **Gram-Schmidt** (cf. [4, p.165]),

TEOREMA 1.4 (Ortogonalizzazione). Siano $f_1, \dots, f_n, \dots$ un insieme numerabile di elementi linearmente indipendenti di uno spazio euclideo E . Allora E contiene un insieme di elementi $\{\phi_k\}_{k=1,\dots,n,\dots}$ tale che

1. il sistema $\{\phi_n\}$ è ortonormale (cioè $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{m,n}$, dove $\delta_{m,n}$ è il delta di Kronecker);
2. ogni elemento ϕ_n è una combinazione lineare di $f_1, \dots, f_n$;
3. ogni elemento f_n è una combinazione lineare di $\phi_1, \dots, \phi_n$.

NOTA. 1.2. Si osservi che

- l'insieme di partenza $f_1, \dots, f_n, \dots$ **non deve essere necessariamente finito**, come di solito viene spesso richiesto nell'algoritmo di ortogonalizzazione di matrici;
- l'insieme $\phi_1, \dots, \phi_n, \dots$ **non deve essere necessariamente finito**;

- se lo spazio euclideo ha una **base numerabile** formata da elementi linearmente indipendenti $f_1, \dots, f_n, \dots$, allora ha pure una **base ortonormale**.

DEFINIZIONE 1.3 (Serie di Fourier). Se $f \in E$,

$$c_k = (f, \phi_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

e $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ è una successione di elementi ortonormali di E , la serie (formale)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \phi_k$$

è chiamata **serie di Fourier** di f .

DEFINIZIONE 1.4 (Chiuso). Sia

$$\phi_1, \dots, \phi_n, \dots$$

una successione di elementi ortonormali di uno spazio vettoriale normato X . Se ogni elemento $f \in X$ può essere scritto formalmente come serie di Fourier allora l'insieme $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ si dice **chiuso** in X .

PROBLEMA. 1.2.

- Quali proprietà ha l'elemento di miglior approssimazione?
- Cosa bisogna assumere perchè la serie di Fourier di f converga a f ?

TEOREMA 1.5 (Bessel-Parseval). Sia $\phi_1, \dots, \phi_n, \dots$ una successione di elementi ortonormali di uno spazio euclideo E e sia $f \in E$. Allora

- L'espressione

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n a_k \phi_k \right\|$$

ha il minimo per

$$a_k = c_k = (f, \phi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

ed è uguale a

$$\sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2}.$$

- Vale la **disuguaglianza di Bessel**

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

- Vale l'**uguaglianza di Parseval**

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$$

se e solo se l'insieme $\{\phi_k\}_{k=1, 2, \dots, \infty}$ è chiuso in E .

NOTA. 1.3. Osserviamo che

- la soluzione al problema di miglior appross. in norma $\|\cdot\|$ esiste ed è unica: per ottenerla basta calcolare i coefficienti di Fourier.
- se $\{c_k\}_{k=1,\dots,n}$ determina l'elemento di miglior approssimazione di f rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare in $S_n = \langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle$, allora

$$\lim_n \|f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k\| = \lim_n \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2} = 0$$

in virtù dell'uguaglianza di Parseval.

2. Polinomi trigonometrici reali. Studiamo di seguito il caso dei polinomi trigonometrici reali.

DEFINIZIONE 2.1 (Polinomi trigonometrici). Lo spazio vettoriale $\mathbb{T}_n^{\mathbb{R}}$ dei **polinomi trigonometrici di grado n** è costituito dalle combinazioni lineari delle funzioni

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &\equiv 1 \\ \phi_{2k-1}(x) &\equiv \cos(kx), \quad k = 1, \dots, n \\ \phi_{2k}(x) &\equiv \sin(kx), \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Osserviamo che per $n = 1, 2, \dots$, essendo per le **formule di Werner**

$$\cos(nx) \cdot \cos(mx) = \frac{\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)}{2}$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 2\pi, & k = 0 \end{cases}$$

necessariamente

- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2nx)+1}{2} dx = \pi$;
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2(nx)) dx = 2\pi - \pi = \pi$;
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \sin(mx) dx = 0$, (integrandi dispari);
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx = 0, m \neq n$.

Inoltre per $n = 1, 2, \dots$,

$$\sin(nx) \cdot \sin(mx) = \frac{\cos((n+m)x) - \cos((n-m)x)}{2}$$

implica

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) dx = 0, m \neq n$$

in quanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 2\pi, & k = 0 \end{cases}.$$

Sia $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ lo spazio delle funzioni misurabili $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ in $[-\pi, \pi]$ compatto e tali che $|f|^2$ sia integrabile (cf. [4, p.5]). Sia tale spazio dotato del prodotto scalare $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$.

- Per quanto visto

$$1/\sqrt{2\pi}, \dots, \cos(nt)/\sqrt{\pi}, \sin(nt)/\sqrt{\pi}, \dots$$

è una succ. ortonorm. di funzioni in $L^2_{\mathbb{R}}([a, b])$.

- Si dimostra che le $2n + 1$ funzioni

$$1/\sqrt{2\pi}, \dots, \cos(nt)/\sqrt{\pi}, \sin(nt)/\sqrt{\pi}$$

formano una base ortonorm. di $\mathbb{T}_n^{\mathbb{R}}$ dotato del prod. scal. di $L^2_{\mathbb{R}}([a, b])$.

- Si vede che $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{T}_n$ è chiuso in $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ (cf. [4, p.267]).

Dalle precedenti osservazioni e del teorema di Bessel-Parseval:

TEOREMA 2.1. *Consideriamo la successione di elementi ortonormali*

$$1/\sqrt{2\pi}, \dots, \cos(nt)/\sqrt{\pi}, \sin(nt)/\sqrt{\pi}, \dots$$

di $L^2_{\mathbb{R}}([a, b])$. Allora i coefficienti di Fourier che determinano l'elemento di miglior approssimazione corrispondono a

- $c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx / \sqrt{2\pi}$,
- $c_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$, $k = 1, 2, \dots$;
- $c_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$, $k = 1, 2, \dots$

ed è $\lim_k E_k(f) = 0$.

Inoltre vale l'uguaglianza di Parseval

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right)^2 + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right)^2 = \pi \|f\|^2 \end{aligned}$$

(cf. [11]).

3. Polinomi trigonometrici complessi. **DEFINIZIONE 3.1** (Polinomi trigonometrici complessi). *Lo spazio vettoriale $\mathbb{T}_n^{\mathbb{C}}$ dei polinomi trigonometrici complessi di grado n è costituito dalle combinazioni lineari delle funzioni*

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &\equiv 1 \\ \phi_{2k-1}(x) &\equiv \exp(-ikx), \quad k = 1, \dots, n \\ \phi_{2k}(x) &\equiv \exp(ikx), \quad k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

dove "i", come al solito, è la costante immaginaria.

TEOREMA 3.1. *La successione $\{\phi_k\}_k$ è una composta di elementi ortogonali di $L^2_{\mathbb{C}}$.*

DIMOSTRAZIONE. 3.1. *Per $j, k \in \mathbb{Z}$, ricordando l'identità di Eulero*

$$\overline{\exp(ikx)} = \overline{\cos(kx) + i \sin(kx)} = \cos(kx) - i \sin(kx) = \exp(-ikx)$$

e dal fatto che $\exp(imx) \cdot \exp(inx) = \exp(i(m+n)x)$ ricaviamo

$$\int_0^{2\pi} \exp(ijx) \cdot \overline{\exp(ikx)} dx = \int_0^{2\pi} \exp(i(j-k)x) dx.$$

Se $j = k$ tale integrale vale evidentemente 2π altrimenti, se $j \neq k$ vale 0 in quanto

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \exp(i(j-k)x) dx &= \frac{(\exp(i(j-k)2\pi) - \exp(i(j-k)0))}{i(j-k)} \\ &= \frac{1}{i(j-k)} \cdot (1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Poichè $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{T}_n^{\mathbb{C}}$ è **chiuso in** $L_{\mathbb{C}}^2([0, 2\pi])$ (cf.[2, p.24-27])

TEOREMA 3.2. Consideriamo la successione di elementi ortonormali di $L_{\mathbb{C}}^2([0, 2\pi])$

$$1/\sqrt{2\pi}, \dots, \exp(-inx)/\sqrt{2\pi}, \exp(inx)/\sqrt{2\pi}, \dots$$

Allora i coefficienti di Fourier dell'elemento di miglior approssimazione sono

- $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) dx$;
- $c_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(ikx) dx$, $k = 1, 2, \dots$;
- $c_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) dx$, $k = 1, 2, \dots$;

ed è $\lim_k E_k(f) = 0$.

Inoltre vale l'uguaglianza di Parseval

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(ikx) dx \right)^2 = 2\pi \|f\|^2$$

NOTA. 3.1. Di solito non si usa per tali serie di Fourier la notazione introdotta, ma si preferisce descriverla come la serie bilatera

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \exp(ikx)$$

con

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) dx \quad (3.1)$$

Tale espansione è facilmente ricavabile da quella precedentemente espressa.

Si supponga che la funzione $f \in L_{\mathbb{C}}^2([0, 2\pi])$ sia in realtà continua in $[0, 2\pi]$ e periodica cioè $f(0) = f(2\pi)$. Dalla teoria è noto che possiamo scrivere formalmente

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) dx \right) \exp(ikx). \quad (3.2)$$

Usualmente non si calcola tutta la sommatoria ma si considera una sua approssimazione

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) dx \right) \exp(ikx)$$

per N sufficientemente grande.

Osserviamo che diversamente dalla classica interpolazione polinomiale in nodi generici, l'approssimante trigonometrica è disponibile se siamo in grado di calcolare numericamente la quantità

$$I_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) dx$$

per $k = -(N-1), \dots, (N-1)$.

Per funzioni continue e periodiche, si prova che è una buona scelta utilizzare la formula dei **trapezi composta** ([1, p.285-288]). L'algoritmo, estremamente efficiente, per il calcolo dei coefficienti di Fourier si chiama **FFT** (acronimo di Fast Fourier Transform).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- [2] K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework*, Springer, 2001.
- [3] G. Dahlquist e A. Björck, *Numerical methods*, Dover, 2003.
- [4] P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975.
- [5] Encyclopedia of Math, (Orthogonal Series), http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Orthogonal_series.
- [6] G. Gilardi *Analisi Due, seconda edizione*, McGraw-Hill, 1996.
- [7] D.H. Griffel, *Applied functional analysis*, Dover publications, 2002.
- [8] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover publications, 1970.
- [9] A. Quarteroni, R. Sacco e F. Saleri *Matematica Numerica*, Springer, 1998.
- [10] G.B. Wright, M. Javed, H. Montanelli, L.N. Trefethen, *Extension of Chebfun to periodic functions*, SIAM J. Sci. Comp., 2015.
- [11] Wikipedia, (Fourier Series), http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series.