Miglior approssimazione in spazi euclidei

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

4 maggio 2018

Spazi euclidei

Definizione (Spazio euclideo (in $\mathbb{R}$))

Uno spazio vettoriale E dotato di un prodotto interno $(\cdot,\cdot)$ in $\mathbb{R}$, cioè una funzione reale definita sulle coppie $x, y \in E$ con le seguenti proprietà

1. $(x,x) \geq 0$ *per ogni* $x \in E$*; inoltre* $(x,x) = 0$ *se e solo se* $x = 0$*;*
2. $(x,y) = (y,x)$ *per ogni* $x, y \in E$*;*
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$ *per ogni* $x, y \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*
4. $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$ *per ogni* $x, y, z \in E$*.*

si dice spazio euclideo in $\mathbb{C}$*.*

A partire dal prodotto interno si può definire lo spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ ponendo $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$.

Spazi euclidei

Definizione (Spazio euclideo (in $\mathbb{C}$))

Uno spazio vettoriale E dotato di un prodotto interno $(\cdot,\cdot)$ in $\mathbb{C}$, cioè una funzione complessa definita sulle coppie $x, y \in E$ con le seguenti proprietà

1. $(x,x) \geq 0$ *per ogni* $x \in E$*; inoltre* $(x,x) = 0$ *se e solo se* $x = 0$*;*
2. $(x,y) = \overline{(y,x)}$ *per ogni* $x, y \in E$*;*
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$ *per ogni* $x, y \in E$*;*
4. $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x,y)$ *per ogni* $x, y \in E$*;*
5. $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$ *per ogni* $x, y, z \in E$*.*

si dice spazio euclideo in $\mathbb{C}$*.*

A partire dal prodotto interno si può definire lo spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ ponendo $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$.

Spazi euclidei

Vediamo alcuni esempi di spazi euclidei:

- $\mathbb{R}^n$ dotato dell'usuale prodotto scalare, è uno spazio euclideo; se $e_1, \ldots, e_n$ è una base ortonormale, cioè per cui $(\phi_j, \phi_k) = \delta_{j,k}$ (dove al solito $\delta_{j,k}$ è il delta di Kronecker), allora ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere come

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_n e_n, \;\; c_k = (x, e_k).$$

Infatti, moltiplicando ambo i membri di x per e_k si ha per la bilinearità del prodotto scalare

$$(x, e_s) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_n e_n, e_s \right) = \sum_{k=1}^{n} c_n (e_n, e_s) = c_s (e_s, e_s) = c_s.$$

Spazi euclidei

- lo spazio $C([a,b])$ delle funzioni continue nel compatto $[a,b]$, dotato del prodotto scalare

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

è uno spazio euclideo, cf. [8, p.145].

- lo spazio $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ lo spazio delle funzioni misurabili $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $[a,b]$ compatto e tali che $|f|^2$ sia integrabile (cf.[4, p.5]), dotato del prodotto scalare

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

è uno spazio euclideo *completo*, cioè ogni successione di Cauchy è convergente cf. [8, p.145].

Spazi euclidei

- lo spazio $L^2_{\mathbb{C}}([a,b])$ lo spazio delle funzioni misurabili $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ con $[a,b]$ compatto e tali che $|f|^2$ sia integrabile (cf.[4, p.5]) , dotato del prodotto scalare

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

  è uno spazio euclideo *completo*, cf. (cf.[4, p.5]).

  Ricordiamo che se $z = a + i \cdot b$ allora $\overline{z} = a - i \cdot b$ e $\overline{z}$ si chiama il coniugio di z.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Teorema (Pitagora)

Sia E uno spazio euclideo, e siano $f, g \in E$ tali che $(f, g) = 0$ (cioè f e g sono ortogonali). Allora $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Dimostrazione.

Essendo $(f, g) = 0$, dalla bilinearità del prodotto interno,

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = (f,f) + (g,f) + (f,g) + (g,g) \\ &= (f,f) + 0 + 0 + (g,g) \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 \end{aligned}$$

$\triangle$

Notazione.

Denoteremo con $< \phi_k >_{k=1,\ldots,N}$ lo spazio vettoriale definito da $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,N}$.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Teorema (Proiezione ortogonale)

Sia $f \in E$, E *spazio euclideo e* $\{\phi_j\}_{1,\ldots,N}$ *un sistema finito di elementi di* E *lin. indipendenti. Allora* $f^* = \sum_{1,\ldots,N} c_j^* \phi_j$ *è la soluzione del problema*

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{g \in <\phi_k>_{k=1,\ldots,N}} \|f - g\|_2$$

dove i coefficienti c_j^* *verificano le cosidette equazioni normali*

$$\sum_{k=1}^{N} (\phi_j, \phi_k) c_k^* = (\phi_j, f),\ j = 1, \ldots, N.$$

La soluzione è caratterizzata dalla proprietà di ortogonalità cioè che $f^* - f$ *è ortogonale a tutti gli* ϕ_k*, con* $k = 1, \ldots, N$ *o equivalentemente*

$$(f^*, \phi_k) = (f, \phi_k),\ k = 1, \ldots, N. \quad (1)$$

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Dimostrazione.

- *Supponiamo che per un certo* $f^* = \sum_{1,\ldots,N} c_j^* \phi_j$ *si abbia che* $f^* - f$ *sia ortogonale a tutti i* ϕ_k *(e quindi a ogni loro combinazione lineare).*
- *Supponiamo* $f^\circ \neq f^*$ *sia l'elemento di migliore approssimazione.*

Allora, visto che $f - f^*$ *è ortogonale a* $f^* - f^\circ \in < \phi_k >$, *utilizzando il teorema di Pitagora*

$$\begin{aligned} \|f - f^\circ\|^2 &= \|(f - f^*) + (f^* - f^\circ)\|^2 \\ &= \|f - f^*\|^2 + \|f^* - f^\circ\|^2 > \|f - f^*\|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

e quindi f° *non può essere l'elemento di miglior approssimazione.*

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Di conseguenza se $f^* \in < \phi_k >_{k=1,\ldots,N}$ e $f^* - f$ è ortogonale a tutti i ϕ_k allora f^* è la miglior approssimazione di f in $< \phi_k >_{k=1,\ldots,N}$. Rimane allora da mostrare che le condizioni di ortogonalità

$$\left(\sum_{j=1}^{N} c_j^* \phi_j - f, \phi_k \right) = 0, \;\; k = 1, \ldots, N$$

sono soddisfatte per un qualche (unico!) $c^* = (c_j)_{j=1,\ldots,N}$.

Questo problema è equivalente alla esistenza della soluzione del sistema di equazioni normali

$$\sum_{k=1}^{N} (\phi_j, \phi_k) c_k^* = (\phi_j, f), \; j = 1, \ldots, N \tag{3}$$

cioè che la matrice $G = (G_{i,j}) = ((\phi_i, \phi_j))$ è non singolare.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Mostriamo che la matrice (di Gram) G è hermitiana, cioè $G = \overline{G}$, definita positiva e quindi non singolare. Infatti gli autovalori di queste matrici sono tutti strettamente e quindi lo è pure il loro prodotto che a sua volta è esattamente il determinante.

- *Il fatto che sia hermitiana è di immediata verifica, poichè* $G_{i,j} = (\phi_i, \phi_j) = \overline{(\phi_j, \phi_i)} = G_{j,i}$.
- *Per mostrare che è definita positiva, basta vedere che se* $v = (v_i) \in \mathbb{C}^N \backslash \{0\}$, $G_{i,j} = (\phi_i, \phi_j)$, *allora* $v^H G v > 0$.

Si osservi che $v^H G v \in \mathbb{R}$ *essendo*

$$(v^H G v)^H = (v^H G^H v)^H = v^H G v$$

e $\overline{z} = z$ *se e solo se* $z \in \mathbb{R}$.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Supponiamo sia $v = (v_i) \in \mathbb{C}^N \backslash \{0\}$, $G_{i,j} = (\phi_i, \phi_j)$, $u = \sum_i \overline{v}_i \phi_i \neq 0$. *Allora*

$$\begin{aligned} v^H \cdot G \cdot v &= v^H \cdot \overbrace{(\sum_j v_j \overbrace{(\phi_i, \phi_j)}^{G_{i,j}})_i}^{vettore!!} = \sum_i \overline{v}_i \overbrace{(\sum_j \phi_i, \overline{v_j}\phi_j)_i}^{vettore!!} \\ &= \sum_i \sum_j (\overline{v_i}\phi_i, \overline{v_j}\phi_j) = (u, u) > 0. \end{aligned}$$

Quindi esiste f^*, *di miglior approssimazione, ed è tale che* $f^* - f$ *è ortogonale a* ϕ_k *per* $k = 1, \ldots, N$.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Nota.

Osserviamo ora che se non si possiede una base ortogonale $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,N}$ allora per ottenere l'elemento di miglior approssimazione, bisogna

- *Disporre dei prodotti scalari (ϕ_j, ϕ_k) per $j, k = 1, \ldots, N$ e di (ϕ_j, f) per $j = 1, \ldots, N$.*
- *Con i valori (ϕ_j, ϕ_k) si forma la matrice simmetrica (e definita positiva!) di Gram le cui componenti sono $G_{j,k} = (\phi_j, \phi_k)$,*
- *con $b_j = (\phi_j, f)$ si definisce il termine noto b del sistema $Gc = b$,*
- *si risolve quindi tale sistema lineare, la cui soluzione fornisce le componenti (c_j^*) dell'elemento di miglior approssimazione $\sum_j c_j^* \phi_j$.*

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Se invece disponiamo di una base ortogonale $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,N}$ allora il calcolo della miglior approssimazione non richiede la soluzione del sistema delle equazioni normali, bensi' da

$$c_k^* = \frac{(\phi_k, f)}{(\phi_k, \phi_k)}$$

il solo calcolo di alcuni prodotti interni e N divisioni.

Inoltre si noti che se $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,N}$ è un sistema ortogonale, allora

- *i coefficienti di Fourier c_j^* sono independenti da N;*
- *tale indipendenza offre il vantaggio che se è necessario aumentare il numero totale di parametri c_j^*, non è necessario ricalcolare quelli precedentemente ottenuti.*

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Esempio

Un caso importante è quello in cui $\{\phi_j\}_{j=1,\ldots,N}$ *è un sistema ortogonale, cioè*

$$(\phi_j, \phi_k) = c_j \delta_{j,k}, \;\; c_j \neq 0,$$

dove al solito $\delta_{j,k}$ *denota il delta di Kronecker; allora i coefficienti* c_j^* *(detti in questo caso di Fourier) sono calcolabili più semplicemente con la formula*

$$c_j^* = \frac{(f, \phi_j)}{(\phi_j, \phi_j)}, \;\; j = 1, \ldots, N.$$

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei (facoltativo)

Nota.

Fissate le coppie $(x_k, f(x_k))$ e i pesi $w_k > 0$, ove $k = 1, \ldots, M$, una tipica richiesta è cercare il polinomio $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di grado $n <= M + 1$ tale che sia minima

$$\sum_{k=1,\ldots,M} w_k |p_n(x_k) - y_k|^2.$$

Se $\{\phi_k\}$ è una famiglia di $n + 1$ polinomi dove ϕ_k ha grado esattamente k,

- *poniamo $A_{k,j} = \phi(x_k)\sqrt{w_k}$ e A la matrice che ha come componenti $A_{k,j}$;*
- *definiamo il prodotto scalare $(f, g) := \sum_{k=1}^{M} w_k f(x_k) g(x_k)$ e notiamo che*

$$\begin{aligned}
(\phi_i, \phi_j) &= \sum_{k=1}^{M} w_k \phi_i(x_k)\phi_j(x_k) = \sum_{k=1}^{M} (\sqrt{w_k}\phi_i(x_k)) \cdot (\sqrt{w_k}\phi_j(x_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{M} A_{k,i} A_{k,j} = \sum_{k=1}^{M} A^T_{i,k} A_{k,j} = (A^T A)_{i,j}
\end{aligned}$$

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei (facoltativo)

Si noti per prima cosa (fare alcuni facili conti!) che $p_n(x) = \sum_k c_k^* \phi_k(x)$ *minimizza la quantità*

$$\sum_{k=1,\ldots,M} w_k |p_n(x_k) - y_k|^2.$$

se e solo se per $(f,g) := \sum_{k=1}^{M} w_k f(x_k) g(x_k)$

$$\sum_k (\phi_i, \phi_k) c_k = (f, \phi_i).$$

Osserviamo inoltre che

- *da* $(f,g) := \sum_{k=1}^{M} w_k f(x_k) g(x_k)$,
- *da* $A_{k,j} = \phi(x_k)\sqrt{w_k}$,
- *posto* $\hat{\mathbf{f}} = (\hat{f}_k) := (\sqrt{w_k} f(x_k))_k$,
- *denotata con* $A_{j,\cdot}^T$ *la j-sima riga di* A^T,

abbiamo in particolare che per $j = 0, \ldots, n$,

$$(f, \phi_j) := \sum_{k=1}^{M} w_k f(x_k) \phi_j(x_k) = \sum_{k=1}^{M} \sqrt{w_k} f(x_k) \sqrt{w_k} \phi_j(x_k) = \sum_{k=1}^{M} A_{j,k}^T \hat{f}_k = A_{j,\cdot}^T \mathbf{f}.$$

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei (facoltativo)

Inoltre da

$$(\phi_i, \phi_k) = (A^T A)_{i,k}$$

abbiamo

$$\sum_k (\phi_i, \phi_k) c_k^* = \sum_k (A^T A)_{i,k} c_k^*.$$

Quindi, dovendo $\mathbf{c}^*$ *risolvere le equazioni normali* $\sum_k (\phi_i, \phi_k) c_k = (f, \phi_i)$ *per ogni* $i = 0, \ldots, n+1$*, necessariamente da* $(f, \phi_j) = A_{j,\cdot}^T \mathbf{f}$*,*

$$\sum_k (A^T A)_{i,k} c_k^* = \sum_k (\phi_i, \phi_k) c_k^* = (f, \phi_i) = A_{j,\cdot}^T \mathbf{f},\ i = 0, \ldots, n+1$$

ovvero in forma matriciale

$$A^T A \mathbf{c}^* = A^T \mathbf{f}$$

che è la classica formulazione delle equazioni normali dell'algebra lineare.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei (facoltativo)

Osserviamo inoltre che da $(f,g) := \sum_{k=1}^{M} w_k f(x_k) g(x_k)$ *e* $A_{k,j} = \phi(x_k)\sqrt{w_k}$, *posto* $\mathbf{f} = (\sqrt{w_k} f(x_k))_k$ *abbiamo in particolare che per* $j = 0, \ldots, n$, *denotata con* $A^T_{j,\cdot}$ *la* j*-sima riga di* A^T,

$$(f, \phi_j) := \sum_{k=1}^{M} w_k f(x_k) \phi_j(x_k) = \sum_{k=1}^{M} \sqrt{w_k} f(x_k) \sqrt{w_k} \phi_j(x_k) = A^T_{j,\cdot} \mathbf{f}$$

Inoltre da $(\phi_i, \phi_k) = (A^T A)_{i,k}$*,abbiamo* $\sum_k (\phi_i, \phi_k) c_k^* = \sum_k (A^T A)_{i,k} c_k^*$. *Quindi, dovendo* $\mathbf{c}^*$ *risolvere le equazioni normali* $\sum_k (\phi_i, \phi_k) c_k = (f, \phi_i)$ *per ogni* $i = 0, \ldots, n+1$ *necessariamente*

$$\sum_k (A^T A)_{i,k} c_k^* = \sum_k (\phi_i, \phi_k) c_k^* = (f, \phi_i) = A^T_{j,\cdot} \mathbf{f}$$

ovvero

$$A^T A \mathbf{c}^* = A^T \mathbf{f}$$

che è la classica formulazione delle equazioni normali dell'algebra lineare.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Problema.

A questo punto supponiamo che sia $S_0 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots \subseteq E$. *Ci si domanda se per una qualsiasi* $f \in E$ *si abbia che* $\lim_n E_n(f) = 0$. *Abbiamo visto che questo equivale a stabilire che* $\cup_n S_n$ *è denso in* E.

Al momento non abbiamo detto nulla riguardo una possibile base dello spazio euclideo E.

- *Cosa serve richiedere ad* E *perchè esista una base, magari con cardinalità numerabile?*
- *Come ottenere basi ortonormali da una base arbitraria?*

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Definizione (Separabile)

Uno spazio euclideo E si dice separabile se e solo se contiene un sottinsieme $S \subseteq E$ denso e numerabile, cf. [8, p.48].

Teorema

Uno spazio euclideo separabile ha una base ortonormale $\{\phi_k\}_k$ finita o numerabile, cioè tale che $(\phi_j, \phi_k) = \delta_{j,k}$ e se $x \in E$ allora si può scrivere formalmente

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \phi_k$$

per certi $\{c_k\}$, intendendo che $\lim_n \|x - \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k\| = 0$.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Inoltre vale il seguente teorema, basato sull'algoritmo di Gram-Schmidt (cf. [4, p.165]),

Teorema (Ortogonalizzazione)

Siano $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ un insieme numerabile di elementi linearmente indipendenti di uno spazio euclideo E. Allora E contiene un insieme di elementi $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,n,\ldots}$ tale che

1. *il sistema $\{\phi_n\}$ è ortonormale (cioè $(\phi_m, \phi_n)=\delta_{m,n}$, dove $\delta_{m,n}$ è il delta di Kronecker);*
2. *ogni elemento ϕ_n è una combinazione lineare di $f_1, \ldots, f_n$;*
3. *ogni elemento f_n è una combinazione lineare di $\phi_1, \ldots, \phi_n$.*

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Nota.

Si osservi che

- *l'insieme di partenza $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ non deve essere necessariamente finito, come di solito viene spesso richiesto nell'algoritmo di ortogonalizzazione di matrici;*
- *l'insieme $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ non deve essere necessariamente finito;*
- *se lo spazio euclideo ha una base numerabile formata da elementi linearmente indipendenti $f_1, \ldots, f_n, \ldots$, allora ha pure una base ortonormale.*

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Definizione (Serie di Fourier)

Se $f \in E$,

$$c_k = (f, \phi_k), \;\; k = 1, 2, \ldots$$

e $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,\infty}$ *è una successione di elementi ortonormali di* E*, la serie (formale)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \phi_k$$

è chiamata serie di Fourier di f.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Definizione (Chiuso)

Sia

$$\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$$

una successione di elementi ortonormali di uno spazio vettoriale normato X. Se ogni elemento $f \in X$ può essere scritto formalmente come serie di Fourier allora l'insieme $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,}$ si dice chiuso in X.

Problema.

- *Quali proprietà ha l'elemento di miglior approssimazione?*
- *Cosa bisogna assumere perchè la serie di Fourier di f converga a f?*

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Teorema (Bessel-Parseval)

Sia $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ una successione di elementi ortonormali di uno spazio euclideo E e sia $f \in E$. Allora

- *L'espressione*

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k\|$$

ha il minimo per

$$a_k = c_k = (f, \phi_k), \;\; k = 1, 2, \ldots, n$$

ed è uguale a

$$\sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2}.$$

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

- *Vale la disuguaglianza di Bessel*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

- *Vale l'uguaglianza di Parseval*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$$

se e solo se l'insieme $\{\phi_k\}_{k=1,2,\ldots,}$ *è chiuso in* E.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Nota.

Osserviamo che

- *la soluzione al problema di miglior appross. in norma $\|\cdot\|$ esiste ed è unica: per ottenerla basta calcolare i coefficienti di Fourier.*
- *se $\{c_k\}_{k=1,\ldots,n}$ determina l'elemento di miglior approssimazione di f rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare in $S_n =< \phi_1, \ldots, \phi_n >$, allora*

$$\lim_n \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k\| = \lim_n \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2} = 0$$

in virtù dell'uguaglianza di Parseval.

Polinomi trigonometrici reali

Definizione (Polinomi trigonometrici)

Lo spazio vettoriale $\mathbb{T}_n^{\mathbb{R}}$ *dei polinomi trigonometrici di grado* n *è costituito dalle combinazioni lineari delle funzioni*

$$\begin{aligned} \phi_0^*(x) &\equiv 1 \\ \phi_{2k-1}^*(x) &\equiv \cos(kx),\ k = 1, \ldots, n \\ \phi_{2k}^*(x) &\equiv \sin(kx),\ k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Polinomi trigonometrici reali

Osserviamo che per $n = 1, 2, \ldots$, essendo per le formule di Werner

$$\cos(nx) \cdot \cos(mx) = \frac{\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)}{2}$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 2\pi, & k = 0 \end{cases}$$

necessariamente (applicando la formula di Werner nel primo e quarto punto)

- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2nx)+1}{2} dx = \pi$;
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2(nx))\, dx = 2\pi - \pi = \pi$;
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \sin(mx)\, dx = 0$, (integranda dispari);
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx)\, dx = 0, m \neq n$.

Polinomi trigonometrici reali

Inoltre per $n = 1, 2, \ldots,$

$$\sin(nx) \cdot \sin(mx) = \frac{\cos((n+m)x) - \cos((n-m)x)}{2}$$

implica

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx)\, dx = 0, m \neq n$$

in quanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 2\pi, & k = 0 \end{cases} .$$

Polinomi trigonometrici reali

Sia $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ lo spazio delle funzioni misurabili $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ in $[-\pi, \pi]$ compatto e tali che $|f|^2$ sia integrabile (cf.[4, p.5]) . Sia tale spazio dotato del prodotto scalare $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx$.

- Per quanto visto

$$1/\sqrt{2\pi}, \ldots, \cos(nt)/\sqrt{\pi}, \sin(nt)/\sqrt{\pi}, \ldots$$

  è una succ. ortonorm. di funzioni in $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$.
- Si dimostra che le $2n+1$ funzioni

$$\phi_0(t) = 1/\sqrt{2\pi}, \ldots, \phi_{2n-1}(t) = \cos(nt)/\sqrt{\pi}, \phi_{2n}(t) = \sin(nt)/\sqrt{\pi}$$

  formano una base ortonorm. di $\mathbb{T}_n^{\mathbb{R}}$ dotato del prod. scal. di $L^2_{\mathbb{R}}([a, b])$.
- Si vede che $\{\phi_k\}_{k=0,\ldots,2n}$ è chiuso in $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ (cf. [4, p.267]).

Polinomi trigonometrici reali

Dalle precedenti osservazioni e del teorema di Bessel-Parseval:

Teorema

Consideriamo la successione di elementi ortonormali

$$1/\sqrt{2\pi}, \ldots, \cos(nt)/\sqrt{\pi}, \sin(nt)/\sqrt{\pi}, \ldots$$

di $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$*. Allora i coefficienti di Fourier che determinano l'elemento di miglior approssimazione corrispondono a*

- $c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx/\sqrt{2\pi}$,
- $c_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx,\ \ k = 1, 2, \ldots;$
- $c_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx,\ \ k = 1, 2, \ldots$

ed è $\lim_k E_k(f) = 0$.

Polinomi trigonometrici reali

Inoltre vale l'uguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \right)^2 = \pi \|f\|^2$$

(cf. [11]).

Polinomi trigonometrici complessi

Definizione (Polinomi trigonometrici complessi)

Lo spazio vettoriale $\mathbb{T}_n^{\mathbb{C}}$ dei polinomi trigonometrici complessi di grado n è costituito dalle combinazioni lineari delle funzioni

$$\begin{aligned} \phi_0^*(x) &\equiv 1 \\ \phi_{2k-1}^*(x) &\equiv \exp(-ikx),\ k=1,\ldots,n \\ \phi_{2k}^*(x) &\equiv \exp(ikx),\ k=1,\ldots,n \end{aligned}$$

dove "i", come al solito, è la costante immaginaria.

Polinomi trigonometrici complessi

Teorema

La successione $\{\phi_k^*\}_k$ *è una composta di elementi ortogonali di* $L^2_{\mathbb{C}}$.

Dimostrazione.

Per $j, k \in \mathbb{Z}$, *ricordando l'identità di Eulero*

$$\overline{\exp(ikx)} = \overline{\cos(kx) + i\sin(kx)} = \cos(kx) - i\sin(kx) = \exp(-ikx)$$

e dal fatto che $\exp(imx) \cdot \exp(inx) = \exp(i(m+n)x)$ *ricaviamo*

$$\int_0^{2\pi} \exp(ijx) \cdot \overline{\exp(ikx)}\, dx = \int_0^{2\pi} \exp(i(j-k)x)\, dx.$$

Se $j = k$ *tale integrale vale evidentemente* 2π *altrimenti, se* $j \neq k$ *vale* 0 *in quanto*

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \exp(i(j-k)x)\, dx &= \frac{(\exp(i(j-k)2\pi) - \exp(i(j-k)0))}{i(j-k)} \\ &= \frac{1}{i(j-k)} \cdot (1-1) = 0. \end{aligned}$$

Polinomi trigonometrici complessi

Poichè $\{\phi_k^*\}$ è chiusa in $L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$ (cf.[2, p.24-27])

Teorema

Consideriamo la successione di elementi ortonormali di $L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$

$$1/\sqrt{2\pi}, \ldots, \exp(-inx)/\sqrt{2\pi}, \ \exp(inx)/\sqrt{2\pi}, \ldots$$

Allora i coeff. di Fourier dell'elemento di miglior appross. sono

- $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx;$
- $c_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(ikx)\, dx, \ \ k = 1, 2, \ldots;$
- $c_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx, \ \ k = 1, 2, \ldots;$

ed è $\lim_k E_k(f) = 0$.

Inoltre vale l'uguaglianza di Parseval

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(ikx)\, dx \right)^2 = 2\pi \|f\|^2$$

Polinomi trigonometrici complessi

Nota.

Di solito non si usa per tali serie di Fourier la notazione introdotta, ma si preferisce descriverla come la serie bilatera

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \exp(ikx)$$

con

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \tag{4}$$

Tale espansione è facilmente ricavabile da quella precedentemente espressa.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Si supponga che la funzione $f \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$ sia in realtà continua in $[0, 2\pi]$ e periodica cioè $f(0) = f(2\pi)$. Dalla teoria è noto che possiamo scrivere formalmente

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \right) \exp(ikx). \tag{5}$$

Usualmente non si calcola tutta la sommatoria ma si considera una sua approssimazione

$$\sum_{k=-M}^{M} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \right) \exp(ikx)$$

per M sufficientemente grande.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Osserviamo che differentemente dalla classica interpolazione polinomiale in nodi generici, l'approssimante trigonometrica è disponibile se siamo in grado di calcolare numericamente la quantità

$$I_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp\left(-ikx\right) dx$$

per $k = -M, \ldots, M$.

Per funzioni continue e periodiche, si prova che è una buona scelta utilizzare la formula dei trapezi composta ([1, p.285-288])

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{1}^{M^*-1} f(x_i),$$

ove $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, M^*$, $h = (b-a)/M^*$.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Supponiamo $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ sia

- continua,
- periodica, cioè $g(0) = g(2\pi)$.

Utilizzando la formula composta dei trapezi basata su M intervalli equispaziati, posti $x_j = jh$, $j = 0, \ldots, M^*$, $h = 2\pi/M^*$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g(x)dx &\approx \frac{h}{2}(g(0) + g(2\pi)) + h \sum_{j=1}^{M^*-1} g(x_j) \\
&= h \cdot g(2\pi) + h \sum_{j=1}^{M^*-1} g(x_j) = h \sum_{1}^{M^*} g(x_j) \\
&= \frac{2\pi}{M^*} \sum_{j=1}^{M^*} g(x_j)
\end{aligned}
$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Così, per g continua e periodica in $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} g(x)dx \approx \frac{2\pi}{M^*} \sum_{j=1}^{M^*} g\left(\frac{2j\pi}{M^*}\right).$$

Supposto che

- f sia continua e periodica in $[0, 2\pi]$,
- $g(x) = f(x) \exp(-ikx)$, $k = -M, \ldots, M$,
- $M^* = 2M + 1$

il coefficiente di Fourier $\xi_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx$, $k = -M, \ldots, M$ è tale che

$$\xi_k(f) \approx \frac{1}{2M+1} \sum_{j=1}^{2M+1} f\left(j \cdot \frac{2\pi}{2M+1}\right) \cdot \exp\left(-ik \cdot j \frac{2\pi}{2M+1}\right).$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Supposto $k = -M, \ldots, M$, da

$$\xi_k(f) \approx \frac{1}{2M+1} \sum_{j=1}^{2M+1} f\left(j \cdot \frac{2\pi}{2M+1}\right) \cdot \exp\left(-ik \cdot j \frac{2\pi}{2M+1}\right).$$

definiti

- $\mathcal{X}_j = \frac{1}{2M+1} f\left(\frac{2\pi}{2M+1} j\right)$ (con $j = 1, \ldots, 2M+1$);
- $\sigma_k := \sum_{j=1}^{2M+1} \mathcal{X}_j \cdot \exp\left(\frac{-ik2\pi j}{2M+1}\right)$,

abbiamo $\xi_k(f) \approx \sigma_k$ (ove $k = -M, \ldots, M$), in quanto

$$\begin{aligned} \xi_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \\ &\approx \sum_{j=1}^{2M+1} \mathcal{X}_j \cdot \exp\left(\frac{-ik2\pi j}{2M+1}\right) = \sigma_k. \end{aligned} \tag{6}$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

L'algoritmo della Fast Fourier Transform permette di calcolare

$$\tilde{\sigma}_k = \sum_{j=0}^{N-1} \tau_j \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}jk\right), \quad k = 0, \ldots, N-1 \tag{7}$$

non in $O(N^2)$ operazioni ma $O(N \cdot \log(N))$.

Con un po' di fatica (!!!), visto che $\sigma_k = \sigma_{k+2M+1}$,

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{2M+1} \mathcal{X}_j \cdot \exp\left(\frac{-ik2\pi j}{2M+1}\right)$$

ove $k = -M, \ldots, M$, si puó riformulare come in (7), per $N = 2M + 1$.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Originariamente fu scoperto da Cooley-Tukey nel 1965 (anche se secondo alcuni era noto a Gauss!).

IEEE Guest Editors' Introduction: The Top 10 Algorithms.
The FFT is perhaps the most ubiquitous algorithm in use today to analyze and manipulate digital or discrete data.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Si può dimostrare [1, p.179] (non banale!) che

Teorema

Se $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ è continua e periodica allora il polinomio trigonometrico complesso

$$p_M(x) = \sum_{j=-M}^{M} a_k \cdot \exp\left(-ikx\right)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=1}^{2M+1} f\left(j \cdot \frac{2\pi}{2M+1}\right) \cdot \exp\left(-ik \cdot j \frac{2\pi}{2M+1}\right)$$

(cioè a_k è l'approssimazione del coefficiente di Fourier $\xi_k(f)$ utilizzando la formula dei trapezi composta) interpola la funzione "f" nei nodi $x_j = j \cdot \frac{2\pi}{2M+1}$.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Ci poniamo varie domande:

- Quanto buona è l'approssimazione fornita dal metodo dei trapezi, nel calcolo degli integrali?
- Come decadono i coefficienti di Fourier (vedasi anche il Lemma di Lebesgue-Riemann)?
- Quanto buona è l'approssimazione fornita dalla miglior approssimazione f_n in norma 2 o dall'interpolante p_n?

Definizione (Variazione limitata o rettificabile)

Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *si dice a variazione limitata se*

$$T_a^b(f) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\} < +\infty.$$

La quantitá $T_a^b(f)$ *si chiama variazione.*

Esempi di funzioni a variazione limitata sono

- Le funzioni lipschitziane su $[a, b]$;
- le funzioni di classe $C^1([a, b])$.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Teorema ([10])

Se

- f *è* $\eta \geq 1$ *volte differenziabile, periodica e Lipschitziana,*
- $f^{(\eta)}$ *è periodica e a variazione limitata* V *in* $[0, 2\pi]$,
- $I(f) = \int_0^{2\pi} f(x)dx$,
  $I_N(f) = \frac{\pi}{N}(f(0) + f(2\pi)) + \frac{2\pi}{N}\sum_{j=2}^{N-1} f(j2\pi/N)$,

$$|I_N(f) - I(f)| \leq \frac{4V}{N^{\eta+1}}.$$

Se f *è analitica con* $|f(t)| \leq M$ *nella striscia aperta di semiampiezza* α *attorno all'asse reale del piano complesso, allora*

$$|I_N(f) - I(f)| \leq \frac{4\pi M}{\exp(\alpha N) - 1}.$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Teorema (Grandezza coeff. Fourier, [10, p.560])

Se f è

- *f è $\eta \geq 1$ volte differenziabile, periodica,*
- *$f^{(\eta)}$ è periodica e a variazione limitata V in $[0, 2\pi]$,*

allora

$$|\xi_k(f)| \leq \frac{V}{2\pi |k|^{\eta+1}}.$$

Se f è analitica con $|f(t)| \leq M$ nella striscia aperta di semiampiezza α attorno all'asse reale del piano complesso, allora

$$|\xi_k(f)| \leq M \cdot \exp(-\alpha |k|).$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Teorema (Facoltativo. Qualità approssimazione, [10, p.560])

Se f è

- *f è $\eta \geq 1$ volte differenziabile, periodica,*
- *$f^{(\eta)}$ è periodica e a variazione limitata V in $[0, 2\pi]$,*

allora

- *la miglior approssimante $f_n = \sum_{j=-n}^{n} \xi_k(f) \cdot \exp(-ikx)$ in norma 2,*
- *il polinomio interpolante $p_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} a_k \cdot \exp(-ikx)$*

sono tali che

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{V}{\pi\eta(n)^\eta}, \quad \|f - p_n\|_\infty \leq \frac{2V}{\pi\eta(n)^\eta}.$$

Bibliografia

K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.

K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework*, Springer, 2001.

G. Dahlquist e A. Bjorck , *Numerical methods*, Dover, 2003.

P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975.

Encyclopedia of Math, (Orthogonal Series), http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Orthogonal_series.

G. Gilardi *Analisi Due, seconda edizione*, McGraw-Hill, 1996.

D.H. Griffel, *Applied functional analysis*, Dover publications, 2002.

A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover publications, 1970.

A. Quarteroni, R. Sacco e F. Saleri *Matematica Numerica*, Springer, 1998.

G.B. Wright, M. Javed, H. Montanelli, L.N. Trefethen, *Extension of Chebfun to periodic functions*, SIAM J. Sci. Comp., 2015.

Wikipedia, (Fourier Series), http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series.