

Quadratura numerica

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

10 maggio 2018

Quadratura numerica

Problema.

Un classico problema dell'analisi numerica è quello di calcolare l'integrale definito di una funzione f in un intervallo avente estremi di integrazione a, b (non necessariamente finiti) cioè

$$I_w(f) := I_w(f, a, b) = \int_a^b f(x) w(x) dx$$

dove w è una funzione peso in (a, b) [1, p.206, p.270].

La nostra intenzione è di approssimare $I(f)$ come

$$I_w(f) \approx Q_N(f) := \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad (1)$$

*I termini w_i e $x_i \in [\alpha, \beta]$ sono detti rispettivamente **pesi** e **nodi**.*

Quadratura numerica

Siano

- (a, b) l'intervallo di integrazione (non necessariamente limitato),
- $x_1, \dots, x_N$ un insieme di N punti a due a due distinti,
- $f \in C([a, b])$ una funzione w -integrabile cioè per cui esista finito $I_w(f)$.

Nota.

Se l'intervallo è limitato, per il teorema di Weierstrass e l'integrabilità della funzione peso, questo è vero per qualsiasi **funzione continua** in quanto

$$\left| \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| w(x) dx \leq \|f\|_\infty \|w\|_1 < +\infty.$$

Quadratura numerica

Se

$$p_{N-1}(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) L_i(x)$$

è il polinomio che interpola le coppie $(x_i, f(x_i))$ con $i = 1, \dots, N$, dove al solito L_i indica l' i -simo polinomio di Lagrange allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) w(x) dx &\approx \int_a^b p_{N-1}(x) w(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^N f(x_i) L_i(x) w(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\int_a^b L_i(x) w(x) dx \right) f(x_i) \end{aligned} \quad (2)$$

per cui, confrontando con la formula (1) abbiamo

$$w_i = \int_a^b L_i(x) w(x) dx, \quad i = 1, \dots, N.$$

Quadratura numerica

In virtù di quanto detto appare naturale la seguente

Definizione (Formula interpolatoria (Lagrange, 1795))

Una formula di quadratura

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad (3)$$

per cui

$$w_k = \int_a^b L_k(x) w(x)dx, \quad k = 1, \dots, N \quad (4)$$

*si dice **interpolatoria**.*

Definizione (Grado di precisione, Radau 1880)

Una formula

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^M w_i f(x_i)$$

ha **grado di precisione** almeno N se e solo se è esatta per tutti i polinomi f di grado inferiore o uguale a N .

Ha inoltre grado di precisione N se e solo se è esatta per ogni polinomio di grado inferiore o uguale a N ed esiste un polinomio di grado $N + 1$ per cui non lo sia.

Quadratura numerica

Mostriamo ora il seguente

Teorema

Una formula

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

è interpolatoria se e solo se ha grado di precisione almeno $N - 1$.

Dimostrazione. (Facoltativo)

$\Rightarrow$ Se la formula è interp., $\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$ con

$$w_i = \int_a^b L_i(x)w(x)dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se $f = p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ allora $p_{n-1} = \sum_{i=1}^n p_{n-1}(x_i)L_i(x)$.

Quadratura numerica

Da $p_{n-1} = \sum_{i=1}^n p_{n-1}(x_i) L_i(x)$, allora

$$\begin{aligned} \int_a^b p_{n-1}(x) w(x) dx &= \int_a^b \sum_{i=1}^n p_{n-1}(x_i) L_i(x) w(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n p_{n-1}(x_i) \int_a^b L_i(x) w(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n w_i p_{n-1}(x_i), \end{aligned} \tag{5}$$

e quindi la formula ha grado di precisione $n - 1$.

$\Leftarrow$ Viceversa se è esatta per ogni polinomio di grado $N - 1$ allora lo è in particolare per i polinomi di Lagrange $L_i \in \mathbb{P}_{n-1}$, il che implica che $w_i = \int_a^b L_i(x) w(x) dx$ e quindi i pesi sono proprio quelli della formula interpolatoria corrispondente nei nodi $x_1, \dots, x_N$.

Nota.

Osserviamo che il precedente teorema dice che una formula di quadratura a N punti ha grado di precisione $N - 1$ se e solo se i pesi sono del tipo

$$w_i = \int_a^b L_i(x) w(x) dx, \quad i = 1, \dots, N$$

dove al solito

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{(x - x_j)}{x_j - x_i}$$

è l' i -simo polinomio di Lagrange.

Formule di Newton-Cotes

Definizione (Formule di Newton-Cotes (chiuse), (Newton 1676, Cotes 1722))

Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Una formula $S_N(f) = \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$ tale che $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$ si dice di tipo **Newton-Cotes** chiusa (cf. [6, p.336]) se

- i nodi sono equispaziati, cioè

$$x_i = a + \frac{(i-1)(b-a)}{N-1}, \quad i = 1, \dots, N,$$

- i pesi sono $w_i = \int_a^b L_i(x) dx$, $i = 1, \dots, N$, $L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{(x - x_j)}{x_j - x_i}$

e quindi la formula è interpolatoria e ha grado di precisione almeno $N - 1$.

Formule di Newton-Cotes

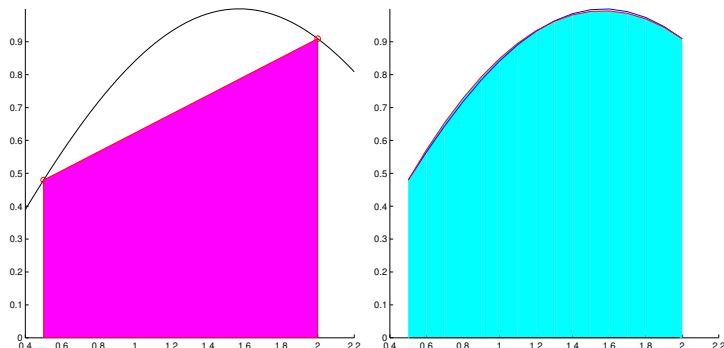


Figura: Regola del trapezio e di Cavalieri-Simpson per il calcolo di $\int_{0.5}^2 \sin(x) dx$ (rispettivamente area in magenta e in azzurro).

Formule di Newton-Cotes

Vediamo alcune formule di Newton-Cotes (chiuse).

Definizione (Regola del trapezio)

La formula

$$I(f) \approx S_1(f) := S_1(f, a, b) := \frac{(b-a)(f(a) + f(b))}{2}$$

*si chiama **regola del trapezio**.*

Si dimostra che

- l'errore compiuto è

$$E_1(f) := I(f) - S_1(f) = \frac{-h^3}{12} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b) \quad (6)$$

- da (6), si vede che il suo grado di precisione è 1 in quanto
 - se $f \in \mathbb{P}_1$, allora $f^{(2)}(\xi) = 0$ e quindi la formula è esatta,
 - se $f \in \mathbb{P}_2 \setminus \mathbb{P}_1$, allora $f^{(2)}(\xi) \neq 0$.

Formule di Newton-Cotes

Definizione (Regola di Cavalieri-Simpson (Cavalieri 1635, Simpson 1743))

La formula

$$I(f) \approx S_3(f) := S_3(f, a, b) := \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

si chiama *regola di Cavalieri-Simpson*.

Si dimostra che

- l'errore compiuto è

$$E_3(f) := I(f) - S_3(f) = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad h = \frac{b-a}{2}, \quad \xi \in (a, b)$$

- il grado di precisione è 3 (e non 2 come previsto!) in quanto
 - se $f \in \mathbb{P}_3$, allora $f^{(4)}(\xi) = 0$ e quindi la formula è esatta,
 - se $f \in \mathbb{P}_4 \setminus \mathbb{P}_3$, allora $f^{(4)}(\xi) \neq 0$.

Formule di Newton-Cotes

Facoltativo.

Vediamo calcolando i pesi, che in effetti le due formule sono interpolatorie.

- **Regola del trapezio.** Posti $x_1 = a$, $x_2 = b$ abbiamo che

$$L_1(x) = \frac{x-b}{a-b}, \quad L_2(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

e quindi visto che $w \equiv 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_a^b L_1(x) dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{1}{a-b} \int_a^b (x-b) dx \\ &= \frac{1}{a-b} \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{a-b} \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{a-b} \frac{-(a-b)^2}{2} = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \int_a^b L_2(x) dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x-a) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

Formule di Newton-Cotes

Facoltativo.

- *Cavalieri-Simpson. I ragionamenti sono analoghi. D'altra parte essendo quelle dei trapezi e Simpson regole rispettivamente aventi 2 e 3 punti con grado 2 e 4, allora sono entrambe interpolatorie.*

Per ulteriori dettagli si confronti [1, p.252-258], [6, p.333-336].

- Qualora le funzioni da integrare non siano sufficientemente derivabili, una stima dell'errore viene fornita dalle formule dell'errore via **nucleo di Peano** ([1, p.259]).
- Ricordiamo che per $N \geq 8$ le formule di Newton-Cotes chiuse hanno pesi di segno diverso e sono **instabili** dal punto di vista della propagazione degli errori (cf. [3, p.196]).

Facoltativo. Formule di Newton-Cotes: lista di altre formule

- *Regola di Milne-Boole:* $\frac{2h}{45}(7f_1 + 32f_2 + 12f_3 + 32f_4 + 7f_5)$.
- *Formula a sei punti:* $\frac{5h}{288}(19f_1 + 75f_2 + 50f_3 + 50f_4 + 75f_5 + 19f_6 + 41f_7)$.
- *Formula a Weddle-Hardy:*
 $\frac{h}{140}(41f_1 + 216f_2 + 27f_3 + 272f_4 + 27f_5 + 216f_6 + 41f_7)$.
- *Formula a otto punti:*
 $\frac{7h}{17280}(751f_1 + 3577f_2 + 1323f_3 + 2989f_4 + 2989f_5 + 1323f_6 + 3577f_7 + 751f_8)$.
- *Formula a nove punti:* $\frac{4h}{14175}(989f_1 + 5888f_2 - 928f_3 + 10496f_4 - 4540f_5 + 10496f_6 - 928f_7 + 5888f_8 + 989f_9)$.
- *Formula a dieci punti:* $\frac{9h}{89600}(2857(f_1 + f_{10}) + 15741(f_2 + f_9) + 1080(f_3 + f_8) + 19344(f_4 + f_7) + 5778(f_5 + f_6))$.
- *Formula a undici punti:* $\frac{5h}{2999376}(16067(f_1 + f_{11}) + 106300(f_2 + f_{10}) - 48525(f_3 + f_9) + 272400(f_4 + f_8) - 260550(f_5 + f_7) + 427368f_6)$.

Facoltativo. Formule di Newton-Cotes: nota storica

Nota.

- *Le formule di Newton Cotes sono state scoperte da Newton nel 1676 e contemporaneamente da Cotes, che in seguito elaboró meglio la teoria.*
- *Di seguito Cotes calcoló le formule per $n \leq 11$. Per questo motivo, talvolta i pesi w_i delle formule di Newton-Cotes, sono detti numeri di Cotes.*
- *Per un interessante nota storica si veda [4] .*

Formule di Newton-Cotes composte

Visto che per $N \geq 8$ le formule risultano instabili, ci si domanda se sia possibile ottenere per $N \geq 8$ delle formule stabili.

Definizione (Formule composte)

Si suddivide l'intervallo (chiuso e limitato) $[a, b]$ in N subintervalli $T_j = [x_j, x_{j+1}]$ tali che $x_j = a + jh$ con $h = (b - a)/N$. Dalle proprietà dell'integrale

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{N-1} S(f, x_j, x_{j+1}) \quad (7)$$

*dove S è una delle regole di quadratura finora esposte (ad esempio $S_3(f)$). Le formule descritte in (7) sono dette **composte**.*

Formule di Newton-Cotes composte: trapezi composta

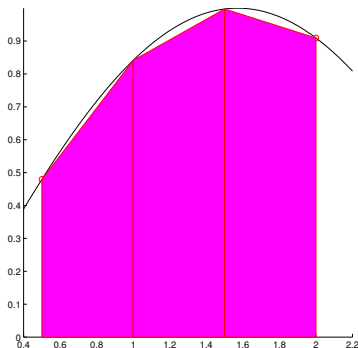


Figura: Formula dei trapezi composta per il calcolo di $\int_{0.5}^2 \sin(x) dx$ (area in magenta).

Formule di Newton-Cotes composte: trapezi composta

Vediamo due casi particolari.

Definizione (Formula dei trapezi (Stevino?))

Siano $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$ con $h = (b - a)/N$. La formula

$$S_1^{(c)}(f, N) := \frac{b - a}{N} \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right] \quad (8)$$

si chiama *dei trapezi* (o del trapezio composta).

- Si mostra che l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$E_1^{(c)}(f) := I(f) - S_1^{(c)}(f, N) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi), \quad h = \frac{(b-a)}{N}.$$

- il grado di precisione è 1, ma relativamente alla Regola del trapezio, per $N \geq 1$, il passo h è minore.

Formule di Newton-Cotes composte: trapezi composta

Sotto certe ipotesi, la stima $E_1^{(c)}(f) \approx \frac{C}{N^2}$ è conservativa.

Teorema (Formula di **Eulero-Mac Laurin**, 1735)

Se l'integranda $f \in C^{2M+2}([a, b])$ allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= S_1^{(c)}(f, N) - \sum_{k=1}^M \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right) \\ &\quad - \frac{B_{2M+2}}{(2M+2)!} h^{(2M+2)} (b-a) f^{(2M+2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b) \end{aligned}$$

dove B_k sono i **numeri di Bernoulli** (Bernoulli, 1713).

Se $f \in C^{2M+2}([a, b])$ e $f^{(2k-1)}(b) = f^{(2k-1)}(a)$, per $k = 1, \dots, M$

$$\int_a^b f(x) dx - S_1^{(c)}(f, N) = -\frac{B_{2M+2}}{(2M+2)!} h^{(2M+2)} (b-a) f^{(2M+2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

e deduciamo che $E_1^{(c)}(f) \approx \frac{C}{N^{2M+2}}$.

Formule di Newton-Cotes composte: trapezi composta

Storicamente la formula venne trovata indipendentemente da Eulero e da Maclaurin, il primo per velocizzare la convergenza di formule lentamente convergenti mediante integrali, in quanto

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^b f(n) &= \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} \\ &+ \sum_{k=1}^M \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) + f^{(2k-1)}(a) \right) \\ &- \frac{B_{2M+2}}{(2M+2)!} (b-a) f^{(2M+2)}(\xi)\end{aligned}\tag{9}$$

mentre il secondo per questioni di integrazione numerica. Il resto della formula fu calcolato da S.D.Poisson.

Sui numeri di Bernoulli

Nota. (Primo algoritmo elaborato da una macchina)

Augusta Ada Byron, meglio nota come Ada Lovelace (Londra, 10 dicembre 1815 Londra, 27 novembre 1852), stata una matematica inglese, nota soprattutto per il suo lavoro alla macchina analitica ideata da Charles Babbage.

*Tra i suoi appunti sulla macchina di Babbage si rintraccia anche un **algoritmo per generare i numeri di Bernoulli, considerato come il primo algoritmo espressamente inteso per essere elaborato da una macchina**, tanto che Ada Lovelace spesso ricordata come la prima programmatrice di computer al mondo.*

Formule di Newton-Cotes composte: trapezi composta

In realtà l'errore può perfino decrescere più rapidamente.

Teorema

Si supponga $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ sia

- *periodica con periodo 2π ,*
- *analitica,*
- *soddisfi $|f(z)| \leq M$ nel semipiano $\text{Im}(z) > -a$, $a > 0$.*

Allora per ogni $N \geq 1$

$$|S_1^{(c)}(f, N) - I(f)| \leq \frac{2\pi M}{e^{aN} - 1}$$

e la costante 2π è la più piccola possibile.

Formule di Newton-Cotes composte: Cavalieri-Simpson composta

Definizione (Formula di Cavalieri-Simpson composta)

Fissati N subintervalli, sia $h = \frac{b-a}{N}$. Siano inoltre $x_k = a + kh/2$, $k = 0, \dots, 2N$. La formula

$$I(f) \approx S_3^{(c)}(f, N) := \frac{h}{6} \left[f(x_0) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + 4 \sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2N}) \right] \quad (10)$$

è nota come di *Cavalieri-Simpson composta*.

- Si mostra che l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$E_3^{(c)}(f) := I(f) - S_3^{(c)}(f, N) = \frac{-(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2} \right)^4 f^{(4)}(\xi)$$

- il grado di precisione è 3, ma relativamente alla regola di Cavalieri-Simpson, per $N \geq 1$, il passo h è minore.

Formule gaussiane

Problema.

Nelle formule interpolatorie di Newton-Cotes (come ad esempio la regola del Trapezio o di Cavalieri-Simpson)

- *i nodi $x_1, \dots, x_n$ sono equispaziati,*
- *il grado di precisione δ è generalmente uguale almeno a $n - 1$ ma in alcuni casi, come per la regola di Cavalieri-Simpson, uguale al numero di nodi n .*

Consideriamo ora formule

- *valide anche su intervalli (a, b) non necessariamente limitati,*
- *valide per certe funzioni peso $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$,*
- *che a parità di nodi hanno grado di precisione maggiore.*

Formule gaussiane

Definizione (Funzione peso)

Una funzione $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (non necessariamente limitato) si dice funzione peso, se (cf. [1, p.206, p.270])

1 w è nonnegativa in (a, b) ;

2 esiste ed è finito

$$\int_a^b |x|^n w(x) dx$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$;

3 se

$$\int_a^b g(x) w(x) dx$$

per una qualche funzione nonnegativa g allora $g \equiv 0$ in (a, b) .

Formule gaussiane

Tra gli esempi più noti ricordiamo

- 1 **Legendre** (scoperti nel 1785): $w(x) \equiv 1$ in $[a, b]$ limitato;
- 2 **Jacobi** (scoperti nel 1834): $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ in $(-1, 1)$ per $\alpha, \beta \geq -1$;
- 3 **Chebyshev** (scoperti nel 1853): $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $(-1, 1)$;
- 4 **Laguerre** (scoperti nel 1879): $w(x) = \exp(-x)$ in $[0, \infty)$;
- 5 **Hermite** (scoperti nel 1864): $w(x) = \exp(-x^2)$ in $(-\infty, \infty)$;

Nota.

I polinomi di Hermite erano già parzialmente noti a Laplace (1810).

Si supponga ora di dover calcolare per qualche funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$I_w(f) := \int_a^b f(x)w(x) dx.$$

Il problema è evidentemente più generale di quello di calcolare un integrale del tipo $\int_a^b f(x)dx$ con $f \in C([a, b])$, $[a, b]$ limitato, visto che

- *l'integranda fw non é necessariamente continua in $[a, b]$ (si consideri ad esempio il peso di Chebyshev che ha una singolarità in $a = -1$, $b = 1$)*
- *oppure può succedere che l'intervallo sia illimitato come nel caso del peso di Laguerre o Hermite.*

Formule gaussiane

Problema.

Esistono nodi $x_1, \dots, x_n$ e pesi $w_1, \dots, w_n$ (detti di Gauss-nome funzione peso) per cui le relative formule di quadratura di tipo interpolatorio abbiano grado di precisione $\delta = 2n - 1$, cioè calcolino esattamente

$$\int_a^b p(x)w(x) dx$$

*per ogni polinomio p il cui grado è minore o uguale a $2n - 1$?
La risposta è affermativa, come si può vedere in [1, p.272].*

Formule gaussiane

Teorema (Esistenza e unicità delle formule gaussiane (Jacobi, 1826))

Per ogni $n \geq 1$ esistono e sono unici dei nodi $x_1, \dots, x_n$ e pesi $w_1, \dots, w_n$ per cui il grado di precisione sia almeno $2n - 1$.

*I **nodi** sono gli zeri del polinomio ortogonale di grado n ,*

$$\phi_n(x) = A_n \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

*e i corrispettivi **pesi** sono*

$$w_i = \int_a^b L_i(x) w(x) dx = \int_a^b L_i^2(x) w(x) dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

Formule gaussiane

Dimostrazione. ([3, p.209])

Per prima cosa mostriamo che in effetti *con tale scelta dei nodi la formula interpolatoria ha grado di precisione almeno $2n - 1$* , che i pesi sono univocamente determinati e positivi.

Siano $p_{2n-1} \in \mathbb{P}_{2n-1}$ e $q_{n-1}, r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ tali che

$$p_{2n-1} = q_{n-1}\phi_n + r_{n-1}.$$

- $\int_a^b q_{n-1}(x)\phi_n(x)w(x)dx = (q_{n-1}, \phi_n)_w = 0$, poichè ϕ_n è il polinomio ortogonale rispetto w di grado n ; infatti essendo

$$(\phi_k, \phi_n)_w = 0, \quad k = 0 < n$$

necessariamente da $q_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \phi_k$ abbiamo

$$(q_{n-1}, \phi_n)_w = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \phi_k, \phi_n \right)_w = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k (\phi_k, \phi_n)_w = 0$$

Formule gaussiane

- *la formula è interpolatoria per costruzione (vedere la definizione dei pesi!), per cui esatta per ogni polinomio di grado $n - 1$ in quanto basata su n punti a due a due distinti;*
- *se x_k è uno zero di ϕ_n allora*

$$p_{2n-1}(x_k) = q_{n-1}(x_k)\phi_n(x_k) + r_{n-1}(x_k) = r_{n-1}(x_k).$$

Quindi, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_a^b p_{2n-1}(x)w(x)dx &= \int_a^b q_{n-1}(x)\phi_n(x)w(x)dx + \int_a^b r_{n-1}(x)w(x)dx \\ &= 0 + \int_a^b r_{n-1}(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n w_k r_{n-1}(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n w_k p_{2n-1}(x_k)\end{aligned}\tag{11}$$

per cui tale formula ha grado di precisione almeno $2n - 1$.

Formule gaussiane

Dimostrazione.

Inoltre, come dimostrato da Stieltjes nel 1884, i pesi

$$w_i = \int_a^b L_i(x)w(x)dx, \quad i = 1, \dots, n$$

sono positivi.

Infatti la formula è esatta per ognuno dei quadrati dei polinomi di Lagrange relativo ai punti $x_1, \dots, x_n$ in quanto

- $\deg(L_i^2) = 2(n-1)$,
- *la formula ha grado di precisione almeno $2n-1$,*

per cui, per ogni $j = 1, \dots, n$,

$$0 < \int_a^b L_j^2(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n w_k L_j^2(x_k) = \sum_{k=1}^n w_k \delta_{j,k} = w_j.$$

Formule gaussiane

Se esistesse un'altra formula interpolatoria con grado di precisione almeno $2n - 1$ e avesse

- nodi $\{\tilde{x}_j\}_{j=1,\dots,n}$,
- pesi $\{\tilde{w}_j\}_{j=1,\dots,n}$,

per prima cosa *i pesi sarebbero positivi* poichè il grado di precisione è almeno $2n - 1$ e quindi sarebbe esatta per il j -simo polinomio di Lagrange $\tilde{L}_j$ da cui

$$0 < \int_a^b \tilde{L}_j^2(x) w(x) dx = \sum_{k=1}^n \tilde{w}_k \tilde{L}_j^2(\tilde{x}_k) = \tilde{w}_j,$$

per $j = 1, \dots, n$.

Formule gaussiane

D'altra parte se $\tilde{L}_j$ è il j -simo polinomio di Lagrange (avente grado $n - 1$), poichè ϕ_n è il polinomio ortogonale di grado n rispetto al peso w , e $\tilde{w}_j > 0$ abbiamo che da

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi_n, \tilde{L}_j)_w = \int_a^b \phi_n(x) \tilde{L}_j(x) w(x) dx = \sum_{k=1}^n \tilde{w}_k \tilde{L}_j(\tilde{x}_k) \phi_n(\tilde{x}_k) \\ &= \tilde{w}_j \cdot \phi_n(\tilde{x}_j) \end{aligned} \tag{12}$$

necessariamente $x_j = \tilde{x}_j$ per cui $\tilde{x}_j$ è un qualche zero del polinomio ortogonale.

Formule gaussiane

A priori i nodi della seconda formula possono essere meno di n .

Siano essi $\tilde{x}_j$ con $j = 1, \dots, m < n$. Ma in tal caso

$p_m(x) = \prod_{j=1}^m (x - \tilde{x}_j) \neq 0$, $p_m^2(x)$ ha grado

$2m \leq 2(n-1) = 2n-2$ e quindi

$$0 < \int_a^b p_m^2(x) w(x) dx = \sum_{j=1}^m \tilde{w}_j \cdot \prod_{k=1}^m (\tilde{x}_j - \tilde{x}_k)^2 = 0$$

Così i nodi $\tilde{x}_j$ sono esattamente n e coincidono con x_j e visto che questo implica $L_j = \tilde{L}_j$ ricaviamo anche

$$w_j = \int_a^b L_j^2(x) w(x) dx = \int_a^b \tilde{L}_j^2(x) w(x) dx = \tilde{w}_j.$$



Formule gaussiane, una nota

Nota.

Osserviamo che una formula gaussiana a n nodi *non può avere grado maggiore di $2n - 1$* .

Infatti, posto $p_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j) \neq 0$, $p_n^2(x)$ ha grado $2n$ e avremmo

$$0 < \int_a^b p_n^2(x) w(x) dx = \sum_{j=1}^n w_j \cdot \prod_{k=1}^n (x_j - x_k)^2 = 0$$

il che è assurdo.

Formule gaussiane: nota storica

Nota. (Sequenza di scoperte)

- Le formule gaussiane per il peso di Legendre furono scoperte da **Gauss** nel 1814 mediante un elegante tecnica basata sulle frazioni continue associate a serie ipergeometriche. [4, p.17].
- **Jacobi** successivamente semplificò la teoria nel 1826 mediante l'uso di polinomi ortogonali il cui nome fu introdotto probabilmente da Schmidt nel 1905.
- Il lavoro di Gauss e Jacobi rimase dormiente per almeno 40 anni.
- Successivamente **Posse** (1875), **Christoffel** (1877) considerarono funzioni peso più generali su intervalli finiti.
- **Stieltjes** nel 1894 generalizzò la teoria a misure di Stieltjes positive su intervalli anche illimitati.

Sull'errore di quadratura delle formule di Newton-Cotes e di Gauss

Facoltativo.

Riguardo gli errori compiuti da alcune formule di quadratura.

Teorema ([1], p. 264)

Sia la regola di Newton-Cotes $I(f) \approx I_n(f) = \sum_{i=0}^n w_{i,n} f(x_{i,n})$.

- se **n è pari** e $f \in C^{(n+2)}([a, b])$ allora

con $I(f) - I_n(f) = C_n h^{n+3} f^{(n+2)}(\eta)$, $\eta \in (a, b)$

$$C_n = \frac{1}{(n+2)!} \int_0^n \mu^2(\mu-1) \dots (\mu-n) d\mu;$$

- se **n è dispari** e $f \in C^{(n+1)}([a, b])$ allora

con $I(f) - I_n(f) = C_n h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta)$, $\eta \in (a, b)$

$$C_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^n \mu(\mu-1) \dots (\mu-n) d\mu;$$

Si osserva facilmente che quanto visto in precedenza per la regola del trapezio e la regola di Cavalieri-Simpson, è consistente con questi due teoremi.

Sull'errore di quadratura delle formule di Newton-Cotes e di Gauss

Per quanto concerne l'errore compiuto dalle **formule gaussiane**,

Teorema (Markov?, [1], p. 272)

Sia $f \in C^{(2n)}(a, b)$ con (a, b) limitato e supponiamo

$$I_w(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx \approx I_n(f) = \sum_{i=1}^n w_{i,n}f(x_{i,n})$$

sia una **formula gaussiana** rispetto alla funzione peso w . Allora

$$E_n(f) := I_w(f) - I_n(f) = \frac{\gamma_n}{A_n^2(2n)!} f^{(2n)}(\eta), \quad \eta \in (a, b)$$

dove A_n è il coefficiente di grado massimo del polinomio ortogonale ϕ_n di grado n , $\gamma_n = \int_a^b \phi_n^2(x)w(x)dx$.

Sull'errore di quadratura delle formule di Newton-Cotes e di Gauss

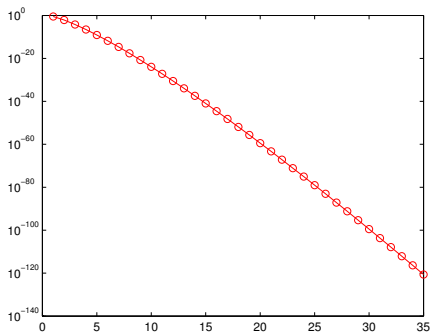


Figura: Grafico in scala semilogaritmica della funzione $\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}$.

In particolare, se $w \equiv 1$, $[a, b] \equiv [-1, 1]$ allora

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\eta), \quad \eta \in (-1, 1).$$

Stabilità di una formula di quadratura

Problema.

Sia

- (a, b) un intervallo non necessariamente limitato,
- w una funzione peso in (a, b) .

Inoltre supponiamo

- posto $f_j = f(x_j)$ sia

$$I_w(f) := \int_a^b f(x)w(x) dx \approx S(f) := \sum_{j=1}^{\eta} w_j f_j, \quad (13)$$

- invece di $\{f_j\}_j$ si disponga di una loro approssimazione $\{\tilde{f}_j\}_j$.

Ci si chiede come cambia il valore dell'integrale, valutando invece

$$I_w(f) := \int_a^b f(x)w(x) dx \approx \tilde{S}_n(f) := \sum_{j=1}^{\eta} w_j \tilde{f}_j. \quad (14)$$

Stabilità di una formula di quadratura

Da

$$S(f) = \sum_{j=1}^{\eta} w_j f_j, \quad \tilde{S}(f) = \sum_{j=1}^{\eta} w_j \tilde{f}_j,$$

ricaviamo per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |S(f) - \tilde{S}(f)| &= \left| \sum_{j=1}^{\eta} w_j (f_j - \tilde{f}_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{\eta} |w_j| |f_j - \tilde{f}_j| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \max_j |f_j - \tilde{f}_j|. \end{aligned} \quad (15)$$

Quindi la quantità

$$\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$$

è un **indice di stabilità** della formula di quadratura S .

Stabilità di una formula di quadratura

- Se la formula ha grado di precisione almeno 0 allora

$$\int_a^b w(x)dx = \int_a^b 1 \cdot w(x)dx = \sum_{j=1}^{\eta} w_j.$$

- Si ha $\sum_{j=1}^{\eta} w_j \leq \sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$ con la disuguaglianza stretta se e solo se qualche peso w_j è negativo.

Di conseguenza,

$$\int_a^b w(x)dx = \sum_{j=1}^{\eta} w_j \leq \sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$$

con la disuguaglianza stretta se qualche peso w_j è negativo.

Quindi la presenza di pesi negativi peggiora l'indice di stabilità $\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$, mentre se sono tutti positivi

$$\int_a^b w(x)dx = \sum_{j=1}^{\eta} |w_j|.$$

Alcune norme di operatori

Proposizione.

Se (a, b) è limitato allora l'operatore $S : (C([a, b]), |||_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definito da

$$S(f) = \sum_{j=1}^{\eta} w_j f_j.$$

è lineare e continuo ed ha **norma** $\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$.

Nota.

Questo teorema dice che l'indice di stabilità corrisponde alla norma

$$\|S\|_\infty = \max_{f \in C([a, b]), f \neq 0} \frac{|S(f)|}{\|f\|_\infty}$$

dell'operatore S .

Alcune norme di operatori

Dimostrazione.

Per il teorema di Weierstrass esiste $\|f\|_\infty$ ed è

$$|S(f)| = \left| \sum_{j=1}^{\eta} w_j f_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\eta} |w_j| |f_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \max_j |f_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \|f\|_\infty$$

e quindi I_n è lineare e continuo con norma minore o uguale a

$$\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|.$$

In particolare, scegliendo opportunamente f si prova che la norma dell'operatore di quadratura

$$\|S\|_\infty = \max_{f \in C([a,b]), f \neq 0} \frac{|S(f)|}{\|f\|_\infty}$$

coincide con $\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$.



Alcune norme di operatori

Proposizione.

Se (a, b) è limitato

$$\|I\|_{\infty} = \max_{f \in C([a,b]), f \neq 0} \frac{|I(f)|}{\|f\|_{\infty}} = \int_a^b w(x) dx = \|w\|_1.$$

Dimostrazione.

Da

$$\begin{aligned} |I(f)| &= \left| \int_a^b f(x)w(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|w(x)dx \\ &\leq \int_a^b w(x)dx \cdot \|f\|_{\infty} = \|w\|_1 \|f\|_{\infty} \end{aligned}$$

e $|I(1)| = \|w\|_1$, deduciamo che $\|I\|_{\infty} = \|w\|_1$.



Teorema di Stieltjes: legame tra errore di quadratura e miglior approssimazione polinomiale

Teorema (Stieltjes)

Sia

- (a, b) un intervallo limitato,
- $f \in C([a, b])$,
- $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione peso.

Se

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{\eta_n} w_j f_j, \quad \text{con } f_j = f(x_j)$$

è una formula di quadratura avente **grado di precisione almeno n** ,
posto $\mathcal{E}_n(f) = I(f) - I_n(f)$, si ha

$$|\mathcal{E}_n(f)| \leq \left(\|w\|_1 + \sum_{j=1}^{\eta_n} |w_j| \right) \cdot \min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty. \quad (16)$$

Teorema di Stieltjes: legame tra errore di quadratura e miglior approssimazione polinomiale

Dimostrazione.

- Se $q_n \in \mathbb{P}_n$ è un polinomio arbitrario di grado n , avendo la formula di quadratura grado di precisione almeno n , ed $I(q_n) = I_n(q_n)$.
- Ricordiamo inoltre che gli operatori I ed I_n sono lineari e quindi

$$I_n(f - q_n) = I_n(f) - I_n(q_n), \quad I(f - q_n) = I(f) - I(q_n).$$

- Per quanto visto $|I_n(f)| \leq \|I_n\|_\infty \|f\|_\infty$, $|I(f)| \leq \|f\|_\infty \|w\|_1$.

Teorema di Stieltjes: legame tra errore di quadratura e miglior approssimazione polinomiale

Quindi, se $q_n \in \mathbb{P}_n$ è il polinomio di miglior approssimazione di f , da

- $|I_n(f)| \leq \|I_n\|_\infty \|f\|_\infty = \sum_{j=1}^{\eta_n} |w_j| \|f\|_\infty,$
- $|I(f)| \leq \|f\|_\infty \|w\|_1,$
- $\min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty = \|f - q_n^*\|_\infty.$

abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(f) &= |I(f) - I_n(f)| = |I(f) - I_n(q_n) + I_n(q_n) - I_n(f)| \\ &\leq |I(f) - I_n(q_n)| + |I_n(q_n) - I_n(f)| \\ &\leq |I(f) - I(q_n)| + |I_n(q_n - f)| = |I(f - q_n)| + |I_n(f - q_n)| \\ &\leq \|w\|_1 \|f - q_n\|_\infty + \|I_n\|_\infty \|f - q_n\|_\infty \\ &= (\|w\|_1 + \|I_n\|_\infty) \cdot \|f - q_n\|_\infty \\ &= \left(\|w\|_1 + \sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty.\end{aligned}$$



Teorema di Stieltjes: legame tra errore di quadratura e miglior approssimazione polinomiale

Nota. (Importante!)

L'interesse di questo teorema è il legame col polinomio di miglior approssimazione. Risulta importante osservare che in

$$|\mathcal{E}_n(f)| \leq \left(\|w\|_1 + \sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_{\infty}. \quad (17)$$

contribuiscono i prodotti di due termini.

- 1** *Il primo è dovuto alla funzione peso e alla stabilità della formula di quadratura.*
- 2** *Il secondo è dato esclusivamente dalla miglior approssimazione di f (e non fw).*

Teorema di Stieltjes: legame tra errore di quadratura e miglior approssimazione polinomiale

Quindi se w è una funzione peso con

- fw non regolare
- ma f regolare

allora l'utilizzo di formule gaussiane rispetto alla funzione peso w , come anticipato prima, offre risultati potenzialmente migliori, come suggerito dai teoremi di Jackson sulla miglior approssimante polinomiale di una funzione f , che forniscono stime di

$$\min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty$$

con $f \in C([a, b])$ (dotando $C([a, b])$ della norma infinito).

Teorema di Stieltjes: legame tra errore di quadratura e miglior approssimazione polinomiale

Esempio

Quale esempio consideriamo una formula

- *a pesi positivi,*
- *grado di precisione $n \geq 0$.*

Necessariamente, posto $E_n(f) = \min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty$,

- $\|I_n\|_\infty = \sum_i |w_i| = \sum_i w_i = \|w\|_1 = \int_a^b w(x) dx$, *in quanto la formula integra esattamente la costante 1,*
- $\|I\|_\infty = \|w\|_1$,

ricaviamo

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \left(\sum_i |w_i| + \|w\|_1 \right) E_n(f) = 2\|w\|_1 E_n(f).$$

Se ad esempio $w \equiv 1$ nell'intervallo $(-1, 1)$, da $\|w\|_1 = 2$ si ha che
$$|I(f) - I_n(f)| \leq 4 \cdot E_n(f).$$

Teorema di Stieltjes: legame tra errore di quadratura e miglior approssimazione polinomiale

Esercizio

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^1 \exp(x) \sqrt{1-x^2} dx$$

con

- *la formula di Gauss-Legendre e*
- *una formula di Gauss-Jacobi con esponenti $\alpha = 1/2$ e $\beta = 0$.*

Quale delle due sarà da usare e perchè ?

Teorema di Polya-Steklov, sulla convergenza delle formule di quadratura

Sia $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione peso, con (a, b) **limitato**. Sotto queste ipotesi, se f continua in $[a, b]$ allora $fw \in L^1(a, b)$. Definita la famiglia di formule $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (con g.d.p. non necessariamente n)

$$I_w(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx \approx S_n(f) := \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n}f(x_{i,n}) \quad (18)$$

introduciamo l'errore della formula n -sima

$$\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n}f(x_{i,n}).$$

Ci si domanda quando

$$\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n}f(x_{i,n}) \rightarrow 0.$$

Teorema di Polya-Steklov, sulla convergenza delle formule di quadratura

Teorema (Polya-Steklov, (1916-1933) [3], p.202)

Siano

- $[a, b]$ un intervallo *compatto*,
- $S_n(f) = \sum_{i=1}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n})$, $n = 0, 1, \dots$ una sequenza di formule di quadratura tale che $I_w(f) \approx S_n(f)$.
- $\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=1}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n})$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché per ogni $f \in C([a, b])$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_n(f) = 0$$

è che

- 1 esista $M \in \mathbb{R}$ per cui si abbia $\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M$ (indip. da n);
- 2 per ogni $k \in \mathbb{N}$ si abbia $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_n(x^k) = 0$.

Teorema di Polya-Steklov, sulla convergenza delle formule di quadratura

Dimostrazione.

$\Leftarrow$ (Steklov, 1916). Supponiamo che

1 esista $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni n si abbia

$$\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M;$$

2 per ogni $k \in \mathbb{N}$ si abbia

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_n(x^k) = 0.$$

Per un teorema di densità dovuto a Weierstrass, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un polinomio p tale che $\|f - p\|_{\infty} \leq \epsilon$.

Teorema di Polya-Steklov, sulla convergenza delle formule di quadratura

Fissato n , per la definizione di norma degli operatori, si ha che

$$\|I_w\|_\infty = \sup_{g \in C([a,b]), g \neq 0} \frac{|I_w(g)|}{\|g\|_\infty}$$

e dato che $\|I_w\|_\infty = \|w\|_1$

$$|I_w(g)| \leq \|I_w\|_\infty \|g\|_\infty = \|w\|_1 \|g\|_\infty, \quad \forall g \in C([a, b]). \quad (19)$$

Similmente

$$\|S_n\|_\infty = \sup_{g \in C([a,b]), g \neq 0} \frac{|S_n(g)|}{\|g\|_\infty} \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}|$$

implica che

$$|S_n(g)| \leq \|S_n\|_\infty \|g\|_\infty = \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \|g\|_\infty. \quad (20)$$

Teorema di Polya-Steklov, sulla convergenza delle formule di quadratura

Posto $g = f - p$ in $|I_w(g)| \leq \|w\|_1 \|g\|_\infty$, $|S_n(g)| \leq \sum_i |w_i| \|g\|_\infty$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_n(f - p)| &= |I_w(f - p) - S_n(f - p)| \leq |I_w(f - p)| + |S_n(f - p)| \\ &\leq \|w\|_1 \|f - p\|_\infty + \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \|f - p\|_\infty \\ &= \left(\|w\|_1 + \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \right) \cdot \|f - p\|_\infty \\ &\leq (\|w\|_1 + M) \cdot \epsilon. \end{aligned} \tag{21}$$

Di conseguenza $|\mathcal{E}_n(f - p)| \leq (\|w\|_1 + M) \cdot \epsilon$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si osservi che il secondo membro della precedente disuguaglianza non dipende da n .

Teorema di Polya-Steklov, sulla convergenza delle formule di quadratura

Essendo

- $|\mathcal{E}_n(f - p)| \leq (\|w\|_1 + M) \cdot \epsilon$, per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $|\mathcal{E}_n(p)| \rightarrow 0$,

deduciamo che

$$|\mathcal{E}_n(f)| \leq |\mathcal{E}_n(f - p)| + |\mathcal{E}_n(p)| \leq (\|w\|_1 + M) \cdot \epsilon + |\mathcal{E}_n(p)|$$

e siccome per n sufficientemente grande abbiamo $|\mathcal{E}_n(p)| \leq \epsilon$ visto che $|\mathcal{E}_n(p)| \rightarrow 0$, deduciamo che per n sufficientemente grande

$$|\mathcal{E}_n(f)| \leq (\|w\|_1 + M + 1) \cdot \epsilon$$

da cui $|\mathcal{E}_n(f)| \rightarrow 0$ per l'arbitrarietà di ϵ .

Teorema di Polya-Steklov, sulla convergenza delle formule di quadratura

$\Rightarrow$ (Polya, 1933). Mostriamo che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_n(f) = 0$ per ogni $f \in C(a, b)$ allora esiste $M \in \mathbb{R}$ indipendente da "n" per cui si abbia

$$\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M.$$

Supponiamo che per ogni $f \in C([a, b])$ sia $\lim_n \mathcal{E}_n(f) = 0$. Essendo

$$\mathcal{E}_n(f) = I_w(f) - S_n(f)$$

abbiamo $S_n(f) = I_w(f) - \mathcal{E}_n(f)$ e quindi per la disuguaglianza triangolare e $|I_w(f)| \leq \|w\|_1 \|f\|_\infty$

$$|S_n(f)| \leq |I_w(f)| + |\mathcal{E}_n(f)| \leq \|w\|_1 \|f\|_\infty + |\mathcal{E}_n(f)|.$$

Teorema di Polya-Steklov, sulla convergenza delle formule di quadratura

Poichè $\lim_n \mathcal{E}_n(f) = 0$ necessariamente $\lim_n |\mathcal{E}_n(f)| = 0$ e quindi, dalla definizione di limite, segue facilmente che esiste $M(f) \in \mathbb{R}$ (indipendente da n , ma dipendente da f) tale che

$$|S_n(f)| \leq \|w\|_1 \|f\|_\infty + |\mathcal{E}_n(f)| \leq M(f) < \infty.$$

Il teorema di uniforme limitatezza (talvolta citato come di Banach-Steinhaus) [2, p.58] stabilisce che

- *se L_n è una sequenza di operatori lineari limitati da uno spazio di Banach V a uno spazio di Banach W ,*
- *per ogni $v \in V$ la sequenza $\{L_n(v)\}_n$ è limitata,*

allora

$$\sup_n \|L_n\| < +\infty.$$

Teorema di Polya-Steklov, sulla convergenza delle formule di quadratura

Nel nostro caso

- $V \equiv (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$, $W \equiv \mathbb{R}$ sono spazi di Banach,
- posto $L_n \equiv S_n$, operatore lineare limitato con norma $\|S_n\|_\infty = \sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}|$, se $f \in C([a, b])$ abbiamo che la sequenza $\{S_n(f)\}_n$ è limitata in quanto esiste $M(f) < \infty$ indipendente da n tale che $|S_n(f)| \leq M(f) < \infty$.

Per il teorema di Banach-Steinhaus, da $\|S_n\|_\infty = \sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}|$ si ha

$$\sup_n \left(\sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}| \right) = \sup_n \|S_n\|_\infty < +\infty.$$

e quindi esiste M finito tale che $\sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Il secondo punto da dimostrare è ovvio in quanto per ogni k , si ha $x^k \in C([a, b])$.

Teorema di Polya-Steklov, sulla convergenza delle formule di quadratura

Nota. ([5, p.318])

La dimostrazione originale di Polya non utilizzava il teorema di Banach-Steinhaus, bensí mostrava l'esistenza di una funzione f per cui non valeva $\lim_n \mathcal{E}_n(f) = 0$ se non esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni n si abbia

$$\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M.$$

Alcune conseguenze e osservazioni sul Teorema di Polya-Steklov

Nota.

- L'intervallo $[a, b]$ è limitato per cui il teorema di Polya **non è applicabile per funzioni peso quali Gauss-Laguerre e Gauss-Hermite**.
- Si osservi che in generale le formule di errore introdotte nei capitoli precedenti, implicavano la convergenza in caso l'integranda f fosse sufficientemente regolare. Nel teorema di Polya-Steklov si chiede **esclusivamente che $f \in C([a, b])$** , senza però offrire stime dell'errore compiuto.

Alcune conseguenze e osservazioni sul Teorema di Polya-Steklov

Teorema

*Consideriamo una formula su un dominio **limitato**, con i **pesi** $w_{i,n}$ **positivi**. Essa è convergente per ogni $f \in C([a, b])$ se e solo se è convergente per ogni polinomio p .*

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Se è convergente per ogni $f \in C([a, b])$ allora lo è sicuramente per ogni $p \in \mathcal{P}_n$.

$\Leftarrow$ Per il teorema di Polya-Steklov, basta mostrare che se converge sui polinomi allora, in queste ipotesi, si ha che $\sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}| < M$ per ogni n . Poichè converge sui polinomi, lo è in particolare per $p(x) \equiv 1$, da cui

$$\sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}| = \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} = S_n(1) \xrightarrow{n} I(1) = \int_a^b w(x) dx$$

e quindi $\sup_n (\sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}|) < M$ con M indipendente da n .



Alcune conseguenze e osservazioni sul Teorema di Polya-Steklov

Teorema

Una formula gaussiana su un dominio limitato è convergente.

Dimostrazione.

Sia una formula di Gauss, su un dominio limitato, con n nodi $\{w_{i,n}\}_{i=1,\dots,n}$ positivi. Per quanto detto, è convergente per ogni $f \in C([a, b])$ se e solo se è convergente per ogni polinomio p . Ma ciò è verificato banalmente in quanto essendo il grado di precisione almeno $2n - 1$, fissato k , per $n \geq \text{ceil}((k + 1)/2)$ si ha $E_n(x^k) = 0$.

Quindi, essendo tutti gli zeri contenuti in (a, b) , possiamo applicare il teorema di Polya-Steklov e dedurre che al crescere del numero di punti n della formula gaussiana si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(f) = 0$$

Alcune conseguenze e osservazioni sul Teorema di Polya-Steklov

Teorema

Una sequenza di formule composte, basate su regole a pesi positivi e g.d.p. $n \geq 0$, risulta convergente qualora l'ampiezza delle suddivisioni tenda a 0.

Dimostrazione. (Facoltativa)

Si consideri la suddivisione $\Delta_m = \{\tau_i\}_{i=0,\dots,m}$ dell'intervallo (a, b) con

$$\tau_i < \tau_{i+1}, \quad \tau_0 = a, \quad \tau_m = b$$

nodi della formula in questione.

Visto che la formula composta ha pesi positivi, risulta convergente per ogni $f \in C([a, b])$ se e solo se è convergente per ogni polinomio p .

Alcune conseguenze e osservazioni sul Teorema di Polya-Steklov

Mostriamo che è convergente per qualsiasi polinomio p .

Osserviamo che tale formula composta integra esattamente ogni funzione polinomiale a tratti di grado n su Δ e che se $s_{\Delta_m,n}$ è l'interpolante polinomiale a tratti di grado n della funzione f relativamente alla suddivisione Δ_m e ai nodi di quadratura,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b (f(x) - s_{\Delta_m,n})dx + \int_a^b s_{\Delta_m,n}dx \\ &= \int_a^b (f(x) - s_{\Delta_m,n})dx + \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \quad (22)\end{aligned}$$

Alcune conseguenze e osservazioni sul Teorema di Polya-Steklov

da cui se $f \in C^{(n+1)}([a, b])$

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_n(f)| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \right| \\ &= \left| \int_a^b (f(x) - s_{\Delta_{m,n}}) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b 1 \cdot dx \right| \cdot \|f - s_{\Delta_{m,n}}\|_{\infty} \\ &\leq (b - a) \cdot \|f - s_{\Delta_{m,n}}\|_{\infty} \\ &\leq (b - a) \cdot \frac{h^{(n+1)} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!} \end{aligned} \tag{23}$$

Alcune conseguenze e osservazioni sul Teorema di Polya-Steklov

Siccome un polinomio $f(x) = x^k$ è infinitamente derivabile, $f^{(n+1)}$ è continua in $[a, b]$ e quindi per il teorema di Weierstrass $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ è finito.

Di conseguenza, se la successione di formule composte è tale che la massima ampiezza h della suddivisione tende a 0 allora $\mathcal{E}_n(x^k) \rightarrow 0$. Per il teorema di Polya-Steklov si ha così che la formula composta a pesi positivi

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^{\eta_n} w_{i,n}f(x_{i,n}) \quad (24)$$

è tale che qualsiasi sia la funzione continua f , $\mathcal{E}_n(f) \rightarrow 0$ quando la massima ampiezza dei subintervalli tende a 0. $\triangle$

Alcune conseguenze e osservazioni sul Teorema di Polya-Steklov (facoltativo)

Teorema (Facoltativo)

Una formula $I_n(f) \approx \int_a^b f(x)w(x)dx := I(f)$ a pesi positivi convergente sui polinomi e avente grado di precisione almeno 0 risulta convergente sulle funzioni continue a tratti in $[a, b]$.

Dimostrazione. (Facoltativa)

Se f è tale funzione, si dimostra che per ogni $\epsilon > 0$ esistono due funzioni $f_1, f_2 \in C([a, b])$ tali che $f_1 \leq f \leq f_2$ e $\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \epsilon$.

Osserviamo che

- Poichè la formula è a pesi positivi, $f_1 \leq f \leq f_2$ implica che $I_n(f_1) \leq I_n(f) \leq I_n(f_2)$.
- Essendo $f_1 \leq f \leq f_2$,

$$\int_a^b f_1(x)w(x)dx \leq \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)w(x)dx.$$

- Per il teorema di Polya-Steklov abbiamo inoltre che essendo $f_1, f_2 \in C([a, b])$ allora $\lim_n \mathcal{E}_n(f_1) = 0$ e $\lim_n \mathcal{E}_n(f_2) = 0$.

Alcune conseguenze e osservazioni sul Teorema di Polya-Steklov (facoltativo)

Ora notiamo che

$$I(f_1) - I_n(f_2) \leq I(f) - I_n(f) \leq I(f_2) - I_n(f_1). \quad (25)$$

Per la linearità degli operatori I , I_n

$$\mathcal{E}_n(f_1) + I_n(f_1 - f_2) = (I(f_1) - I_n(f_1)) + I_n(f_1 - f_2) = I(f_1) - I_n(f_2) \quad (26)$$

$$\mathcal{E}_n(f_2) + I_n(f_2 - f_1) = (I(f_2) - I_n(f_2)) + I_n(f_2 - f_1) = I(f_2) - I_n(f_1) \quad (27)$$

Inoltre

$$I_n(f_2 - f_1) = \sum_{k=1}^{\eta_n} w_k (f_2(x_k) - f_1(x_k)) \leq \sum_{k=1}^{\eta_n} w_k \|f_2 - f_1\|_{\infty} \quad (28)$$

$$I_n(f_1 - f_2) = -I_n(f_2 - f_1) \geq -\sum_{k=1}^{\eta_n} w_k \|f_2 - f_1\|_{\infty} \quad (29)$$

Alcune conseguenze e osservazioni sul Teorema di Polya-Steklov (facoltativo)

Quindi da (25), in virtù di (27), (28)

$$\mathcal{E}_n(f) \leq I(f_2) - I_n(f_1) = \mathcal{E}_n(f_2) + I_n(f_2 - f_1) \leq \mathcal{E}_n(f_2) + \sum_{k=1}^{\eta_n} w_k \|f_2 - f_1\|_{\infty}$$

mentre da (25), in virtù di (26), (29)

$$\mathcal{E}_n(f_1) - \sum_{k=1}^{\eta_n} w_k \|f_2 - f_1\|_{\infty} \leq \mathcal{E}_n(f_1) + I_n(f_1 - f_2) = I(f_1) - I_n(f_2) \leq \mathcal{E}_n(f)$$

cioè

$$\mathcal{E}_n(f_1) - \sum_{k=1}^{\eta_n} w_k \|f_2 - f_1\|_{\infty} \leq \mathcal{E}_n(f) \leq \mathcal{E}_n(f_2) + \sum_{k=1}^{\eta_n} w_k \|f_2 - f_1\|_{\infty}$$

Dal fatto che $\sum_{k=1}^{\eta_n} w_k = \int_a^b w(x)dx < +\infty$, $\lim_n \mathcal{E}_n(f_1) = \lim_n \mathcal{E}_n(f_2) = 0$ e $\|f_2 - f_1\|_{\infty} \leq \epsilon$, dall'arbitrarietà di ϵ deduciamo che $\mathcal{E}_n(f) \rightarrow 0$.

Bibliografia



K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.



K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis*, Springer, 2001.



V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, McGraw-Hill, 1990.



W. Gautschi, *A Survey of Gauss-Christoffel Quadrature Formulae*, E.B. Christoffel, Birkäuser Verlag, basel, 1981.



G. Hammerlin, K.K. Hoffmann, *Numerical Mathematics*, Springer-Verlag, 1991.



A. Quarteroni e F. Saleri, *Introduzione al calcolo scientifico*, Springer Verlag, 2006.