Calcolo di autovalori e autovettori

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

26 maggio 2015

Autovalori

Il problema del calcolo degli autovalori di una matrice quadrata A di ordine n consiste nel trovare gli n numeri (possibilmente complessi) λ detti autovalori e n vettori x non nulli detti autovettori tali che

$$\boxed{Ax = \lambda x, \ x \neq 0} \tag{1}$$

Si osservi che a seconda delle esigenze

- talvolta è richiesto solamente il calcolo di alcuni autovalori (ad esempio quelli di massimo modulo, per determinare lo spettro della matrice),
- talvolta si vogliono determinare tutti gli n autovalori in $\mathbb{C}$.

Autovalori

Per semplicità, dopo i teoremi di localizzazione di Gershgorin, mostreremo solo un metodo della prima classe (metodo delle potenze) e citeremo la routine Matlab `eig` per la seconda classe, rimandando per completezza alla monografia di Saad o a manuali di algebra lineare [2].

Nota.

Una interessante applicazione è l'algoritmo di **PageRank** *[3], [11], utilizzato da Google per fornire i risultati migliori tra i siti web relativamente a certe parole chiave ed in prima approssimazione basato sul calcolo di un autovettore relativo all'autovalore* 1 *(ad esempio via metodo delle potenze) di una matrice stocastica di dimensioni enormi.*

Un esempio

Il comando `eig` permette di trovare tutti gli autovalori e gli autovettori di una matrice.

```
>> help eig
 eig    Eigenvalues and eigenvectors.
    E = eig(X) is a vector containing the eigenvalues of a square
    matrix X.

    [V,D] = eig(X) produces a diagonal matrix D of eigenvalues and a
    full matrix V whose columns are the corresponding eigenvectors so
    that X*V = V*D.
 ...  ...
>> format long e
>> A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
>> [autovettori,autovalori]=eig(A);
>> autovalori=diag(autovalori)
autovalori =
      1.611684396980704e+01
     -1.116843969807043e+00
     -1.303677726474702e-15
>> autovettori % colonna i-sima = autovettore di autovalore i-simo
autovettori =
     -2.319706872462862e-01    -7.858302387420671e-01     4.082482904638636e-01
     -5.253220933012336e-01    -8.675133925662833e-02    -8.164965809277260e-01
     -8.186734993561815e-01     6.123275602288100e-01     4.082482904638625e-01
>>
```

Un esempio

```
>> x=autovettori(:,1) % Seleziono prima colonna: autovett. relativo al primo
      autoval.
 x =
     -2.319706872462862e-01
     -5.253220933012336e-01
     -8.186734993561815e-01
>> lambda=autovalori(1);
>> A*x % Mostro che A*x=lambda*x
 ans =
     -3.738635371917297e+00
     -8.466534211628401e+00
     -1.319443305133951e+01
>> lambda*x
 ans =
     -3.738635371917303e+00
     -8.466534211628399e+00
     -1.319443305133950e+01
>> x=autovettori(:,2); % Seleziono seconda colonna: : autovett. relativo al
      secondo autoval.
>> lambda=autovalori(2);
>> A*x % Mostro che A*x=lambda*x
 ans =
      8.776497634311060e-01
      9.688771012144937e-02
     -6.838743431882079e-01
>> lambda*x
 ans =
      8.776497634311063e-01
      9.688771012145032e-02
     -6.838743431882052e-01
>>
```

Teoremi di Gershgorin

In questo paragrafo mostriamo un teorema di localizzazione di autovalori dovuto a Gershgorin (cf. [2, p.76], [13]).

Teorema (Primo teorema di Gershgorin)

Gli autovalori di una matrice $A = (a_{i,j})$ di ordine n sono tutti contenuti nell'unione dei cerchi di Gershgorin

$$K_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|\}$$

Esempio

Vediamo quale esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Il primo teorema di Gershgorin stabilisce che gli autovalori stanno nell'unione dei cerchi di Gershgorin

$$\begin{aligned} K_1 &= \{z \in \mathbb{C} : \, |z - 15| \leq |-2| + |2| = 4\} \\ K_2 &= \{z \in \mathbb{C} : \, |z - 10| \leq |1| + |-3| = 4\} \\ K_3 &= \{z \in \mathbb{C} : \, |z - 0| \leq |-2| + |1| = 3\} \end{aligned}$$

Teoremi di Gershgorin

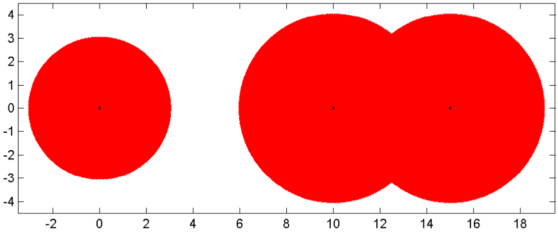

Figura : Cerchi di Gershgorin della matrice A definita in (4)

In effetti gli autovalori sono:

```
>> format short
>> A=[15 -2 2; 1 10 -3; -2 1 0];
>> autovalori=eig(A)
autovalori =
    0.5121
   14.1026
   10.3854
>>
```

Metodo delle potenze

Il metodo delle potenze è stato suggerito nel 1913 da Muntz ed è particolarmente indicato per il calcolo dell'autovalore di massimo modulo di una matrice.

Sia A una matrice quadrata di ordine n con

- n autovettori $x_1, \ldots, x_n$ linearmente indipendenti,
- autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che

$$\boxed{|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.} \qquad (3)$$

Metodo delle potenze

Valgono i seguenti risultati (cf. [4], p. 951).

- Una matrice A è **diagonalizzabile** se e solo se possiede n autovettori linearmente indipendenti.
- Equivalentemente, una matrice A è **diagonalizzabile** se e solo se esiste una matrice S invertibile e una matrice Λ diagonale, tali che
$$\boxed{A = S^{-1} \Lambda S.}$$
- Se tutti gli autovalori di A sono distinti la matrice è diagonalizzabile; l'opposto è ovviamente falso (si pensi alla matrice identica).
- Una matrice simmetrica è diagonalizzabile. L'opposto è ovviamente falso, visto che la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \tag{4}$$
è diagonalizzabile visto che ha tutti gli autovalori distinti ma non è simmetrica.

Metodo (Potenze)

Sia $t_0 \in \mathbb{R}^n$ *definito da*

$$\boxed{t_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i, \;\; \alpha_1 \neq 0}$$

Il metodo delle potenze genera la successione

$$\boxed{\begin{array}{l} y_0 = t_0 \\ y_k = A y_{k-1}, \;\; k = 1, 2, \ldots \end{array}}$$

Teorema

Sia A è una matrice quadrata diagonalizzabile avente autovalori λ_k tali che

$$\boxed{|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.}$$

Siano $u_k \neq 0$ autovettori relativi all'autovalore λ_k, cioè

$$Au_k = \lambda_k u_k.$$

Sia

$$y_0 = \sum_k \alpha_k u_k, \quad \alpha_1 \neq 0.$$

La successione $\{y_s\}$ definita da $y_{s+1} = Ay_s$ converge ad un vettore parallelo a u_1 e che il coefficiente di Rayleigh (relativo al prodotto scalare euclideo) converge a λ_1 cioè

$$\boxed{\rho(y_s, A) := \frac{(y_s, Ay_s)}{(y_s, y_s)} \to \lambda_1.} \tag{5}$$

Metodo delle potenze

Nota.

Il metodo converge anche nel caso in cui

$$\boxed{\lambda_1 = \ldots = \lambda_r}$$

per $r > 1$, tuttavia non è da applicarsi quando l'autovalore di modulo massimo non è unico.

Nota.

In virtú di possibili underflow e underflow si preferisce normalizzare il vettore y_k precedente definito. Così l'algoritmo diventa

$$\boxed{\begin{array}{l} u_k = At_{k-1} \\ t_k = \frac{u_k}{\beta_k},\ \beta_k = \|u_k\|_2 \\ l_k = \rho(t_k, A) \end{array}} \qquad (6)$$

dove $\rho(t_k, A)$ è il coefficiente di Rayleigh definito in (5).

Metodo delle potenze inverse

Una variante particolarmente interessante del metodo delle potenze è stata scoperta da Wielandt nel 1944 [9] ed e' particolarmente utile nel caso in cui A sia una matrice quadrata con n autovettori linearmente indipendenti,

$$\boxed{|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots > |\lambda_n| > 0.} \tag{7}$$

e si desideri calcolare il **piú piccolo autovalore in modulo**, cioè λ_n, applicando il metodo delle potenze ad A^{-1}.

Si ottiene cosí la successione $\{t_k\}$ definita da

$$\boxed{\begin{array}{c} Au_k = t_{k-1} \\ t_k = \frac{u_k}{\beta_k}, \\ \beta_k = \|u_k\|_2 \end{array}}$$

e convergente ad un vettore parallelo a x_n. La successione di coefficienti di Rayleigh è tale che

$$\rho(t_k, A^{-1}) := \frac{(t_k, A^{-1} t_k)}{(t_k, t_k)} = \frac{(t_k, u_{k+1})}{(t_k, t_k)} \to 1/\lambda_n. \qquad (8)$$

da cui è immediato calcolare λ_n, minimo autovalore in modulo di A.

Partiamo con una versione semplice `metodo_potenze` del metodo delle potenze

```
function [lambda1, x1, niter, err]=metodo_potenze(A,z0,toll,nmax)
% INPUT:
% A    : MATRICE DI CUI VOGLIAMO CALCOLARE L'AUTOVALORE DI MASSIMO MODULO.
% z0   : VETTORE INIZIALE (NON NULLO).
% toll: TOLLERANZA.
% nmax: NUMERO MASSIMO DI ITERAZIONI.
% OUTPUT:
% lambda1  : VETTORE DELLE APPROSSIMAZIONI DELL'AUTOVALORE DI MASSIMO MODULO.
% x1       : AUTOVETTORE RELATIVO ALL'AUTOVALORE DI MASSIMO MODULO.
% niter    : NUMERO DI ITERAZIONI.
% err      : VETTORE DEI RESIDUI PESATI RELATIVI A "lambda1".
% TRATTO DA QUARTERONI-SALERI, "MATEMATICA NUMERICA", p. 184.
%
\begin{lstlisting}[frame=single]
q=z0/norm(z0); q2=q; err=[]; lambda1=[];
res=toll+1; niter=0; z=A*q;
while (res >= toll & niter <= nmax)
    q=z/norm(z); z=A*q; lam=q'*z; x1=q;
    z2=q2'*A; q2=z2/norm(z2); q2=q2'; y1=q2; costheta=abs(y1'*x1);
    niter=niter+1; res=norm(z-lam*q)/costheta;
    err=[err; res]; lambda1=[lambda1; lam];
end
```

Il metodo delle potenze in Matlab: esempio

Vediamo il caso della matrice diagonalizzabile (autovalori distinti!)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix},$$

in cui il metodo funziona rapidamente ($\lambda_{\max} = 10$).

```
>> A=[1 2; 0 10];  [lambda1, x1, niter, err]=metodo_potenze(A,[1; 3],10^(-8),15)
lambda1 =
   9.9779e+000
   9.9979e+000
   9.9998e+000
   1.0000e+001
   1.0000e+001
   1.0000e+001
   1.0000e+001
   1.0000e+001
x1 =
   2.1693e-001
   9.7619e-001
niter =
       8
err =
   9.6726e-002
   9.7529e-003
   9.7610e-004
   9.7618e-005
   9.7619e-006
   9.7619e-007
   9.7619e-008
   9.7619e-009
```

Il metodo delle potenze in Matlab: esempio 2

Testiamo il codice per il calcolo dell'autoval. di massimo modulo di

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -15.5 & 7.5 & 1.5 \\ -51 & 25 & 3 \\ -25.5 & 7.5 & 11.5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

- La matrice A è diagonalizzabile e ha autovalori 10, 10, 1.
- Quale vettore iniziale del metodo delle potenze consideriamo

  $$z_0 = (1, 1, 1) = (7/6) \cdot (1, 2, 7) - 1 \cdot (2, 5, 9) + (11/18) \cdot (3, 6, 3)$$

  che si dimostra possedere le proprietà richieste dal metodo delle potenze.

Il metodo delle potenze in Matlab: esempio 2

Dalla shell di Matlab/Octave:

```
>>A =[-15.5 7.5 1.5; -51 25 3; -25.5 7.5 11.5];
>> z0=[1 1 1]'; toll=10^(-8); nmax=10;
>> [lambda1, x1, niter, err]=metodo_potenze(A,z0,toll,nmax)
lambda1 =
   1.1587e+001
   1.0138e+001
   1.0014e+001
     ...
   1.0000e+001
   1.0000e+001
   1.0000e+001
x1 =
  -2.8583e-001
  -9.1466e-001
  -2.8583e-001
niter =
     10
err =
   2.2466e+000
   2.1028e-001
   2.0934e-002
    ...
   2.0924e-007
   2.0924e-008
   2.0924e-009
>>
```

Il metodo converge all'autovalore $\lambda = 10 = 1.0000e + 001$.

Bibliografia

- K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- D. Bini, M. Capovani e O. Menchi, *Metodi numerici per l'algebra lineare*, Zanichelli, 1988.
- C. Brezinski e M. Redivo Zaglia, *The PageRank vector: properties, computation, approximation, and acceleration*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 28 (2006) 551-575.
- V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
- G.H. Golub e C.F. Van Loan, *Matrix Computation, 3rd Edition*, The John Hopkins University Press 1996.
- Netlib,http://www.netlib.org/templates/matlab/
- A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Matematica numerica*, 2001.
- A. Quarteroni e F. Saleri, *Introduzione al calcolo scientifico*, Springer Verlag, 2006.
- Wikipedia (Inverse iteration) http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_iteration.
- Wikipedia (Metodo delle potenze) http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_delle_potenze.
- Wikipedia (PageRank) http://it.wikipedia.org/wiki/Page_rank.
- Wikipedia (Rayleigh quotient) http://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh_quotient.
- Wikipedia (Teoremi di Gershgorin) http://it.wikipedia.org/wiki/Teoremi_di_Gershgorin.