Esercizi sulle relazioni

Esercizio 1. Sia $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$. Verificare quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva) sono soddisfatte e quali non sono soddisfatte dalle relazioni su A date di seguito. Nel caso si tratti di una relazione di equivalenza, determinare le classi di equivalenza.

1. $R = \{(f, g) \in A \times A : f(i) \leq g(i) \quad \forall i \in \mathbb{N}\}$.
2. $R = \{(f, g) \in A \times A : f(0) \leq g(0)\}$.
3. $R = \{(f, g) \in A \times A : f(0) < g(0) \text{ o } f = g\}$.
4. $R = \{(f, g) \in A \times A : f = g$ o esiste $k \geq 1$ tale che $f(i) = g(i) \quad \forall i < k$ e $f(k) < g(k)\}$.
5. $R = \{(f, g) \in A \times A : f(0) + g(0)$ è pari $\}$.

Esercizio 2. Sia $A = \{i \in \mathbb{N} : i \leq n\}$. Sia $B = \{f : A \to A\}$.

1. Determinare la cardinalità di B.
2. Data la relazione su B, $R = \{f \in B \times B : f(0) = g(0)\}$, mostrare che è una relazione di equivalenza. Determinare le classi di equivalenza, il loro numero e la loro cardinalità.

Esercizio 3. Sia A un insieme. Una partizione $\mathcal{T}$ dell'insieme A è un sottoinsieme dell'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A tale che per ogni $X, Y \in \mathcal{T}$, se $X \neq Y$ allora $X \cap Y = \varnothing$ e $\cup_{X \in \mathcal{T}} X = A$. Mostrare che $R = \{(a, b) \in A \times A :$ esiste $X \in \mathcal{T}$ tale che $a, b \in X\}$ è una relazione di equivalenza.

Esercizio 4. Sia n un numero naturale, X un insieme di n elementi e $A = \mathcal{P}(X)$.

1. Sia $R = \{(B, C) \in A \times A :$ esiste una funzione biettiva $f : B \to C\}$. Mostrare che R è una relazione di equivalenza su A. Quali sono le classi di equivalenza?
2. Sia $R = \{(B, C) \in A \times A :$ esiste una funzione iniettiva $f : B \to C\}$. Mostrare che R è una relazione di ordine totale. Quali sono il minimo e il massimo rispetto a questa relazione?

Esercizio 5. Siano A e B due insiemi. Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione. Sia $R_B \subseteq B \times B$ una relazione su B. Definiamo $R_A = \{(a_1, a_2) \in A \times A :$ esiste $(b_1, b_2) \in R_B$ con $(a_1, b_1) \in R, (a_2, b_2) \in R\}$. Dimostrare che

1. Se R_B gode della proprietà simmetrica (risp. transitiva), allora anche R_A gode della proprietà simmetrica (risp. transitiva).
2. Supponiamo che per ogni $a \in A$ esista almeno un $b \in B$ tale che $(a, b) \in R$. Se R_B gode della proprietà riflessiva, allora anche R_A gode della proprietà riflessiva.

3. Supponiamo che per ogni $a \in A$ esista un unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in R$ (cioè R è il grafico di una funzione). Se R_B gode della proprietà antisimmetrica (risp. antiriflessiva), allora anche R_A gode della proprietà antisimmetrica (risp. antiriflessiva).

Esercizio 6. Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi. Siano $z, w \in \mathbb{C}$. Si considerino le seguenti relazioni in $\mathbb{C}$:

1. $z \sim w$ se e solo se $|z| = |w|$.
2. $z \sim w$ se e solo se $\Re(z) \leq \Re(w)$.
3. $z \sim w$ se e solo se $\Im(z) = \Im(w)$.
4. $z \sim w$ se e solo se $z - w \in \mathbb{Z}$.
5. Fissiamo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. $z \sim w$ se e solo se $z^n = w^n$.

Dire quali sono di equivalenza, quali di ordine. Descrivere l'insieme quoziente nelle relazioni di equivalenza, esibendo una biezione con un insieme noto.

Esercizi sugli insiemi e sulle funzioni

Esercizio 7. Sia $A = \{1, 2, 3\}$.

1. Determinare $\mathcal{P}(A)$, insieme delle parti di A.
2. Determinare $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

Esercizio 8. Siano A e B insiemi. Sia $f : A \to B$ una funzione e siano $X, Y \subseteq A$. Provare che:

1. f ha inverso a sinistra se e solo se f è iniettiva.
2. f ha inverso a destra se e solo se f è suriettiva.
3. $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ se e solo se f è iniettiva.
4. $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$ se e solo se f è iniettiva.