ESERCIZI DIINTEGRAZIONE

**Appello 13 Settembre 1994**

**Esercizio.** Calcolare:
$$\iint_D e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y}{x^2+y^2} dxdy$$
dove $D = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

**Appello 13 Settembre 1996**

**Esercizio 3.** Sia $E$ is solido definito da
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z,\ z \leq 2 - y\}.$$
Disegnare $E$ e trovarne il volume.

**Appello 2 Febbraio 1995**

**Esercizio 4.** Trovare il volume del solido
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 - y^2\}.$$

**Appello 2 Ottobre 1996**

**Esercizio 4.** Sia $S$ il solido
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}.$$

(1) Calcolare il volume della porzione di $S$ compresa tra i piani del $30^o$ e del $45^o$ parallelo nord. (Si tratta cioè dei piani orizzontali passanti, rispettivamente, per i punti di coordinate sferiche $(a, 60^o, \theta)$ e $(a, 45^o, \theta)$

**Appello 21 Febbraio 1995**

**Esercizio 4.** Trovare il volume del solido
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

**Appello 25 Settembre 1998**

**Esercizio 4.** Determinare il volume del solido $S$ definito da:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - 2y\}.$$

**Appello 28 Settembre 1994**

**Esercizio 4.** Un calice la cui superficie ha equazione $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ con $0 \leq z \leq 10$ è pieno d'acqua. Si vuole travasare il liquido in un altro calice di equazione $x^2 + y^2 \leq z \leq 2$. Determinare per quali valori di $a$ il secondo calice contiene tutto il liquido.

**Appello 28 Settembre 1999**

**Esercizio 4.**

(1) Disegnare nel piano $(xy)$ la curva di $\mathcal{C}$ equazione:

$$y^2 = x^3(1 - x).$$

(2) Determinare il volume del solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse $x$ la porzione di curva $\mathcal{C}$ che appartiene al primo quadrante.

**Prima Prova 24 Maggio 2002**

**Esercizio 3.** Sia $V$ il solido definito da:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0; \quad 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

(1) Disegnare $V$ e calcolarne il volume.
(2) Calcolare la coordinata $z$ del baricentro di $V$, cioè

$$\iiint_V z dV.$$

**Appello 10 Giugno 1994**

**Esercizio 4.** Calcolare il volume della regione racchiusa tra il paraboloide $z = x^2 + y^2$ e il piano $z = 8 - 2x$.

**Appello 10 Giugno 1998**

**Esercizio 4.** Sia $S$ il solido definito da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\}$$

(1) Disegnare $S$ e calcolarne il volume.
(2) Calcolare il momento d'inerzia di $S$ rispetto all'asse $z$.
(Cioè $\iiint_S (x^2 + y^2) dV$.)

**Appello 10 Luglio 2003**

**Esercizio 2.** Calcolare l'area della porzione di sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ contenuta nel paraboloide $x^2 + y^2 = z$.

**Appello 12 Giugno 1997**

**Esercizio 4.** Sia $V$ il solido unione dei due solidi $V_1$ e $V_2$ definiti da

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, \quad x^2 + y^2 - \frac{1}{9} \leq z\}$$

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 0, \quad z \leq \frac{1}{3} - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

(1) Disegnare $V$ e calcolarne il volume.
(2) Calcolare la coordinata $z$ del baricentro di $V$ supponendo che il solido abbia densità costante 1.
(Determinare cioè $\frac{1}{\mathrm{Vol}\, V} \iiint_V z dV$).

**Appello 12 Giugno 1996**

**Esercizio 4.** Sia $V$ il "cono gelato" definito da:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2} - h \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}$$

dove $a$ ed $h$ sono due costanti reali positive.

(1) Disegnare $V$ e calcolarne il volume.
(2) Calcolare il momento d'inerzia di $V$ rispetto all'asse $z$.
(Cioè $\iiint_V (x^2 + y^2) dV$.)

**Appello 13 Febbraio 2001**

**Esercizio 3.** Sia $D$ la porzione del piano $(xy)$ delimitata dall'asse $x$ e dall' arco di cardiode di equazione polare

$$r = a(1 + \cos\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

(1) Calcolare $\iint_D y dx dy$.
(2) Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare la regione $D$ attorno all'asse delle $x$.

**Appello 13 Settembre 1995**

**Esercizio 4.** Trovare il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2,\ |x| + |y| \leq 1\}.$$

**Appello 14 Giugno 2000**

**Esercizio 4.** Calcolare l'area di quella porzione del cilindro $x^2 - 2x + y^2 = 0$ compresa tra il piano $xy$ e la superficie di equazione $z^2 = x^2 + y^2$.

**Appello 14 Settembre 1998**

**Esercizio 4.** Sia $V$ il solido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq x^2 + y^2, \quad (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Disegnare $V$ e trovarne il volume.

**Appello 14 Settembre 1999**

**Esercizio 4.** Sia $V$ il solido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3 + x^2 + y^2 \leq z \leq 4\sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Disegnare $V$ e trovarne il volume.

**Appello 15 Febbraio 1996**

**Esercizio 4.** Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D xy\,dxdy \quad \text{dove} \quad D = \{(x,y) :\ x+y \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

**Appello 15 Febbraio 2000**

**Esercizio 4.** Sia $E$ is solido definito da

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - (x^2+y^2)}\}.$$

Disegnare $E$ e trovarne il volume.
(Si usino coordinate polari.)

**Appello 15 Giugno 1995**

**Esercizio 4.** Disegnare l'"unghia cilindrica"

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq y\}$$

e calcolarne il volume.

**Appello 16 Giugno 2001**

**Esercizio 3.** Un solido $V$ è ottenuto facendo ruotare la curva di equazione

$$x = z^2 \quad 0 \leq z \leq a, \quad a > 1$$

attorno all'asse $z$.

(1) Per ogni $0 < h \leq a$, trovare il volume del solido $V_h = V \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h\}$.
(2) Calcolare la coordinata $z$ de baricentro di $V$, cioè:

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\,V} \iiint_V z dV.$$

**Appello 17 Giugno 1999**

**Esercizio 4.** Disegnare l'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq x\}$$

e calcolarne il volume.

**Appello 18 Dicembre 1995**

**Esercizio 4.** Sia
$$D = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 6 \\ x^2 + y^2 \leq z. \end{cases}$$
Disegare $D$ e calcolarne il volume.

**Appello 19 Settembre 2000**

**Esercizio 3.** Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione
$$z = f(x, y) = \frac{y + \sqrt{3}x}{x^2 + y^2}.$$
Calcolare il volume del cilindroide con generatrici parallele all' asse $z$, delimitato dal piano $xy$ e dalla porzione della superficie $\mathcal{S}$ che sta al di sopra del dominio $D$ del piano, dove $D$ è costituito dai punti le cui coordinate polari $(\rho, \theta)$ soddisfano le limitazioni $\theta \leq \rho \leq \pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$.

**Appello 2 Luglio 1998**

**Esercizio 5.** Sia $S$ il solido definito da
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2, \quad z \leq 2\}$$

(1) Disegnare $S$ e calcolarne il volume.
(2) Calcolare
$$\iiint_S z e^{x^2+y^2} \, dV.$$

**Seconda prova parziale 1994**

**Esercizio 4.** Determinare il volume della regione compresa tra la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ e il cilndro $x^2 + y^2 = a^2$.

**Esercizio 5.** (Facoltativo) Determinare l'area di quella parte della superficie conica $z^2 = x^2 + y^2$ che è interna alla superficie cilindrica $x^2 + (y - a)^2 = a^2$.

**Appello 20 Febbraio 1998**

**Esercizio 4.** Sia $V$ il solido definito da
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$
Disegnare $V$ e calcolarne il volume.

**Appello 20 Febbraio 2003**

**Esercizio 4.** Si supponga che la calotta sferica $S$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad z \geq 2\}$$

sia riempita di materiale omogeneo.

Calcolare la coordinata $\overline{z}$ de baricentro di $S$, cioè:

$$\frac{1}{\operatorname{Vol} S} \iiint_S z dV.$$

**Appello 22 Febbraio 2002**

**Esercizio 2.** Sia $V$ il solido definito da:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; \quad z \geq -1\}.$$

(1) Disegnare $V$ e trovarne il volume.
(2) Trovare la coordinata $z$ del baricentro di $V$, cioe':

$$\frac{1}{\operatorname{Vol} V} \iiint_V z dV.$$

**Appello 23 Gennaio 2001**

**Esercizio 3.** Sia $D$ la porzione del piano $(xy)$ delimitata dall'asse $x$ e dall' arco di cardiode di equazione polare

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Calcolare

$$\iint_D y dx dy.$$

**Appello 24 Febbraio 1997**

**Esercizio 4.** Calcolare

$$\iiint_V z dV$$

con $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; \quad z \geq 0\}$.

**Appello 25 Giugno 2002**

**Esercizio 2.** Sia $V$ il solido definito da:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4;\ x^2 + y^2 \leq z^2,\quad z \geq 0\}.$$

(1) Disegnare $V$ e trovarne il volume.
(2) Trovare le coordinate del baricentro di $V$.

**Appello 26 Novembre 1998**

**Esercizio 4.** Sia $R$ la regione del piano $x, z$ definita da:

$$R = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq z \leq 2,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 + x^2}\}.$$

(1) Disegnare $R$.
(2) Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare la regione $R$ attorno all'asse $z$.

**Appello 26 Febbraio 1999**

**Esercizio 4.** Sia

$$f(x, y) = (1 - (x^2 + y^2))^2.$$

Determinare il volume dell' insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) \leq z \leq 1\}.$$

**Appello 27 Giugno1996**

**Esercizio 4.** Sia $V$ il solido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ 0 \leq z \leq x - y,\quad x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

(1) Disegnare $V$ e trovarne il volume.
(2) (Facoltativo) Trovare la coordinata $x$ del baricentro di $V$ supponendo che il solido abbia densità costante 1.
(Determinare cioè $\frac{1}{\mathrm{Vol}\,V} \iiint_V x dV$).

**Appello 27 Novembre1997**

**Esercizio 4.** Una "clessidra" è ottenuta facendo ruotare la curva di equazione

$$x = |z|\sqrt{1 - z^2}$$

attorno all'asse $z$.
Trovare il volume della "clessidra".

**Appello 29 Gennaio 2002**

**Esercizio 3.** Sia $V$ il solido definito da:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1; \quad z \leq 3 - (x^2 + y^2); \quad z \geq 0\}.$$

(1) Disegnare $V$ e trovarne il volume.
(2) Trovare le coordinate del baricentro $B$ di $V$.
(Si ricordi che la coordinata $z$ di $B$ è data da $\frac{1}{\mathrm{Vol}\, V} \iiint_V z dV$. Notare che per simmetria le coordinate $x$ e $y$ del baricentro sono 0).

**Appello 3 Luglio 2000**

**Esercizio 3.** Sia $D$ la regione del piano $xz$ definita da:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad \frac{1}{4} \leq x^2 + z^2 \leq 1\},$$

e sia $V$ il solido ottenuto facendo ruotare la regione $D$ attorno all'asse $z$.
(1) Trovare l'area di $D$ e il volume di $V$.
(2) Trovare le coordinate del baricentro $B$ di $V$.
(Si ricordi che la coordinata $z$ di $B$ è data da $\frac{1}{\mathrm{Vol}\, V} \iiint_V z dV$. Notare che per simmetria le coordinate $x$ e $y$ del baricentro sono ...).

**Appello 3 Luglio 2001**

**Esercizio 2.** Sia $V$ il solido definito da:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq a^2; \quad z \leq \frac{2}{3}(x^2 + y^2)\}.$$

(1) Disegnare $V$ e trovarne il volume.
(2) Trovare le coordinate del baricentro $B$ di $V$.
(Si ricordi che la coordinata $z$ di $B$ è data da $\frac{1}{\mathrm{Vol}\, V} \iiint_V z dV$. Notare che per simmetria le coordinate $x$ e $y$ del baricentro sono 0).

**Appello 31 Gennaio 2000**

**Esercizio 4.** Sia $\mathcal{S}$ la porzione del piano $(xy)$ contenuta nel cerchio di raggio 5 centrato nell'origine e nel cerchio di raggio 5 centrato nel punto $P = (0, 8)$. Disegnare $\mathcal{S}$ e trovare il volume del solido ottenuto facendo ruotare $\mathcal{S}$ attorno all'asse delle ordinate.

**Appello 5 Settembre 2000**

**Esercizio 3.** Sia $D$ la regione del piano $xy$ definita da:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 4x \leq y^2\}.$$

Calcolare:

$$\iint_D xy dA.$$

**Appello 8 Gennaio 1997**

**Esercizio 4.** Sia $S$ lo spicchio della superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2 = a^2$ soddisfacente alle limitazioni

$$x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad |y| \leq (\tan\alpha)x$$

Calcolare la coordinata $z$ del baricentro di $S$, cioé

$$\frac{\iint_S z dS}{\text{area } S}.$$

**Appello 8 Luglio 1997**

**Esercizio 4.** Un vaso è ottenuto facendo ruotare la curva di equazione

$$x = \frac{z^{1/2}}{1+z} \quad 0 \leq z \leq 10$$

attorno all'asse $z$.
Trovare il volume del vaso.

**Appello 8 Settembre 1997**

**Esercizio 4.** Sia $V$ il solido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, \quad z \leq 2\}.$$

Disegnare $V$ e trovarne il volume.