## ESERCIZI SU FUNZIONI DI DUE VARIABILI
## MASSIMI E MINIMI

**ESERCIZIO** 1. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione

$$z = f(x,y) = x^2 - 3y^2 + y^6.$$

(1) Scrivere un' equazione del piano tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $P = (1, 1, -1)$.
(2) Determinare i massimi e minimi relativi di $f(x, y)$.
(3) Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x, y)$ nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.

**ESERCIZIO** 2. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $z = f(x, y)$, dove

$$f(x,y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}.$$

(1) Disegnare le curve di livello di $f(x, y)$ e le loro traiettorie ortogonali. Esibire un campo vettoriale piano costituito da vettori che in ogni punto sono perpendicolari alla curva di livello di $f(x, y)$ passante per quel punto.
(2) Scrivere un'equazione del piano $\pi$ tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $(0, 1, 0)$.
(3) Calcolare i massimi e minimi assoluti di $f(x,y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$ nella corona circolare:

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 2.$$

**ESERCIZIO** 3. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $z = f(x, y)$ con

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^3 - 3x^2y^2.$$

(1) Scrivere un' equazione del piano tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $P = (1, 1, f(1, 1))$.
(2) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello passante per il punto $Q = (1, 1)$ nel punto $Q$.
(3) Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x, y)$ nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.

**ESERCIZIO** 4. Sia $z = f(x,y) = x^2 + y$.

(1) Determinare la direzione di massima crescita di $f(x, y)$ nel punto $Q = (1, 2)$ e calcolare la rapidità di variazione di $f(x, y)$ in tale direzione nel punto $Q$.
(2) Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti critici e i masimi e minimi di $f(x, y)$ sull' insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$, dove $g(x, y) = y^3 - y^4 - x^2$.

**ESERCIZIO** 5. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione
$$z = f(x, y) = 3x^2 - 2y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$
(1) Sia $\mathcal{C}$ la curva di livello di $f(x, y)$ a livello 0. Scrivere un' equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = (1, 1)$.
(2) Determinare la direzione nella quale la rapidità di variazione di $f(x, y)$ è nulla nel pumto $(1, 0)$.
(3) Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x, y)$ nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.

**ESERCIZIO** 6. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione
$$z = f(x, y) = x^2 + 4y^2.$$
(1) Disegnare la curva di livello di $f(x, y)$ a livello 1.
(2) Scrivere un' equazione del piano tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $P = (1, -1, 5)$.
(3) Determinare la direzione di massima crescita di $f(x, y)$ nel punto $Q = (1, 1)$ e calcolare la rapidità di variazione di $f(x, y)$ in tale direzione nel punto $Q$.
(4) Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x, y)$ nel triangolo di vertici
$(-2, 0)$, $(1, 1/2)$ e $(1, -1/2)$.

**ESERCIZIO** 7. Sia
$$f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$
(1) Determinare la derivata direzionale di $f(x, y)$ nel punto $(1, 2)$ nella direzione della retta $x + y = 0$.
(2) Calcolare i massimi e minimi assoluti di $f(x, y)$ nella corona circolare:
$$\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

**ESERCIZIO** 8. Sia $f(x, y) = x^3 e^{x^2 - y^2} + y^2 e^x$. Sia $\mathcal{C}$ la curva di livello di $f(x, y)$ passante per il punto $P = (0, 1)$.
(1) Scrivere la derivata $y'(x)$ della funzione $y(x)$ definita implicitamente dall' equazione $f(x, y) = f(0, 1)$.
(2) Scrivere un' equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto (0,1).
(3) Scrivere un' equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel punto (0,-1,1).

**ESERCIZIO** 9. Sia
$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2}.$$
(1) Disegnare la curva di di livello di $f(x, y)$ passante per il punto $P = (1, 1)$.
(2) Determinare un'equazione della retta tangente alla curva di livello di $f(x, y)$ passante per il punto $P = (1, 2)$ nel punto $P$.

(3) Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x, y)$ nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.

**ESERCIZIO** 10. Sia $f(x, y) = xy^2 - x^2y^4$ ed $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $z = f(x, y)$.

(1) Per ogni punto $P = (a, 0, f(a, 0))$, scrivere un' equazione del piano $\pi$ tangente a $\mathcal{S}$ in $P$.
(2) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello passante per il punto $Q = (1, 1)$ nel punto $Q$.
(3) Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di $f(x, y)$ nel quadrato:

$$-1 \leq x \leq 1, \qquad -1 \leq y \leq 1.$$

**ESERCIZIO** 11. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $z = (x+1)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$.

(1) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello passante per il punto P= (0, 1) nel punto P.
(2) Determinare i punti in cui il piano tangente a $\mathcal{S}$ è parallelo all'asse $y$.
(3) Determinare il massimo e il minimo assoluti di $f(x, y) = (x + 1)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 4$.

**ESERCIZIO** 12. La quota $z$ di una collina espressa in Km è data da

$$z = \frac{1}{x^2 + 1} e^{-(x^2+y^2)}.$$

(1) Se ci si trova nel punto $(0, 1)$ (coordinate (x,y) sulla carta della zona) in quale direzione (sulla carta) ci si deve muovere se si vuole percorrere un sentiero che abbia dislivello 0?
(2) Qual è la massima quota sulla collina se si considera la zona sulla carta corrispondente a valori $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$?

**ESERCIZIO** 13. Sia

$$f(x, y) = (1 - (x^2 + y^2))^2.$$

(1) Determinare il piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel punto $P = (1, 1, f(1, 1))$. In quali punti della superficie il piano tangente è orizzontale?
(2) Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y)$ nel cerchio

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

**ESERCIZIO** 14. Sia

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2).$$

(1) Sia $P = (a, 0)$ un punto dell'asse $x$. Scrivere un' equazione della retta tangente alla curva di livello di $f(x, y)$ passante per $P$ nel punto $P$.

(2) Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x,y)$ nel cerchio
$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

**ESERCIZIO** 15. Sia
$$f(x,y) = 2x^2 + xy^2 + y^4.$$

(1) Determinare un'equazione della retta tangente alla curva di livello di $f(x,y)$ passante per il punto $P = (1,0)$ nel punto $P$.
(2) Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x,y)$ nel quadrato $-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$.

**ESERCIZIO** 16. Sia
$$f(x,y) = \sin x + \sin y + x^2 + y.$$

(1) Determinare un' equazione del piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(0,0,0)$.
(2) Determinare la retta tangente alla curva di equazione $f(x,y) = 0$ nel punto $(0,0)$.
(3) Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x,y)$ nel quadrato $-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$.

**ESERCIZIO** 17. Sia
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$
.

(1) Determinare i punti di massimo e minimo relativi e i punti di sella.
(2) Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x,y)$ nel quadrato
$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2$$

**ESERCIZIO** 18. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione
$$z = f(x,y) = (x+y)e^{-x^2}.$$

(1) Scrivere un' equazione del piano tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $P = (0,0,0)$.
(2) Determinare i punti in cui il piano tangente alla superficie è parallelo all'asse $x$.
(3) Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x,y)$ nel triangolo di vertici
$(0,0)$ $(0,1)$ e $(1,0)$.

**ESERCIZIO** 19. Sia
$$f(x,y) = \log(x^2 + 2y^2).$$

(1) Scrivere un'equazione del piano $\pi$ tangente a $f(x,y)$ nel punto $(1,0,0)$
(2) Determinare la direzione di massima crescita di $f(x,y)$ nel punto (1,1).

(3) Determinare la derivata direzionale di $f(x,y)$ in (1,1) nella direzione di massima crescita.
(4) Determinare il massimo e il minimo assoluti di $f(x,y)$ nella corona circolare $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$.