ALGEBRA E GEOMETRIA 1 PER INFORMATICA
ESERCIZI PREPARATORI AL COMPITO FINALE

ESERCIZIO 1.

Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi e sia $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(n) = (n^3, n^4)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

(1) f è iniettiva?
(2) f è suriettiva?

ESERCIZIO 2.

Si provi per induzione su n che:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right).$$

ESERCIZIO 3.

Risolvere le congruenze:

(1) $3x \equiv 8 \mod 13$;
(2) $4x \equiv -3 \mod 17$.

ESERCIZIO 4.

Calcolare $(1+i)^{86} - (1-i)^{48}$.

ESERCIZIO 5.

Fattorizzare il polinomio $x^4 + x^2 + 1$ in $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x]$.

ESERCIZIO 6.

Trovare per quali valori del parametro λ il sistema

$$\mathcal{S}_c = \begin{cases} x_1 & +4x_2 & +3x_3 & & = & 1 \\ -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & \lambda - 1 \\ & -2x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & -2. \end{cases}$$

ha soluzioni. Per tali valori di λ si trovino le soluzioni.

ESERCIZIO 7.

Sia

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \lambda & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Dire per quali valori di λ, A_λ è invertibile e trovare l' inversa per $\lambda = 2$.

1. Risposte

Esercizio 1.

(1) f è iniettiva: infatti se $n, m \in \mathbb{Z}$ e $f(n) = f(m)$ allora $(n^3, n^4) = (m^3, m^4)$. Quindi in particolare si ha $n^3 = m^3$, cioe' $n = m$

(2) f non è suriettiva: infatti $(0, n) \notin f(\mathbb{Z})$ per ogni $0 \neq n \in \mathbb{Z}$

Esercizio 2.

Sia $A(n)$ l' affermazione $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$.

$A(0)$ è vera poiché $\frac{1}{3^0} = 1$ e $\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^0}\right) = 1$.

Supposta vera $A(n)$ dimostriamo $A(n+1)$.

Si ha $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^{n+1}}$. Per l' ipotesi induttiva abbiamo $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$.

Ora $\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{3 \cdot 3^{n+1} - 3 + 2}{2 \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

Perciò $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

Esercizio 3.

(2) M.C.D.$(4, 17) = 1$ e $1 = 17 + 4(-4)$.

Quindi $-3 = 17(-3) + 4(12)$, cioè $4 \cdot 12 \equiv -3 \bmod 17$.

Pertanto le soluzioni sono $12 + 17k$, con $k \in \mathbb{Z}$ o equivalentemente la classe resto di 12 mod17.

Esercizio 4.

Si ha $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})$ e

$1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i \sin\frac{7}{4}\pi)$

Quindi $(1+i)^{86} = 2^{43}(\cos\frac{43}{2}\pi + i \sin\frac{43}{2}\pi) = 2^{43}(-i)$.

Infatti, $\frac{43}{2}\pi = 20\pi + \frac{3}{2}\pi$, perciò $\cos\frac{43}{2}\pi = \cos\frac{3}{2}\pi = 0$ e $\sin\frac{43}{2}\pi = \sin\frac{3}{2}\pi = -1$.

Analogamente $(1-i)^{48} = 2^{24}(\cos(7 \cdot 12\pi) + i \sin(7 \cdot 12\pi)) = 2^{24}$.

Perció $(1+i)^{86} - (1-i)^{48} = 2^{24}(1 - 2^{19}i)$.

Esercizio 5.

Si cercano le radici di $t^2 + t + 1$ e si trovano le due radici

$t_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, $t_2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$.
Le radici quadrate di t_1 sono:

(1) $z_1 = (\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) = (1/2 + i\sqrt{3}/2)$
(2) $z_2 = -(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) = -(1/2 + i\sqrt{3}/2)$

Le radici quadrate di t_2 sono:

(1) $z_3 = (\cos 2/3\pi + i\sin 2/3\pi) = (-1/2 + i\sqrt{3}/2)$
(2) $z_4 = -(\cos 2/3\pi + i\sin 2/3\pi) = -(-1/2 + i\sqrt{3}/2)$.

Perciò in $\mathbb{C}[x]$ si ha

$$x^4 + x^2 + 1 = (x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)(x - z_4).$$

Poiché $z_4 = \overline{z_1}$ e $z_3 = \overline{z_2}$ i polinomi
$(x - z_1)(x - z_4)$ e $(x - z_2)(x - z_3)$ sono a coefficenti reali. Infatti $(x - z_1)(x - z_4) = x^2 - 2\mathrm{Re}z_1 + z_1\overline{z_1} = x^2 - x + 1$ e
$(x - z_2)(x - z_3) = x^2 - 2\mathrm{Re}z_2 + z_2\overline{z_2} = x^2 + x + 1$.
Allora

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

è la fattorizzazione in $\mathbb{R}[x]$ ma anche in $\mathbb{Q}[x]$.

Esercizio 6.

Si scrive la matrice completata

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & | & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 & | & \lambda - 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Dopo due operazioni di EG (sostituire la 2^a riga con la $2^a + 1^a$ e la 3^a riga con la $2^a + 3^a$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & | & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema ha soluzione solo se $\lambda = 2$ e le soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 7a - 2b \\ x_2 = 1 - 5/2a + b/2 \\ x_3 = a \\ x_4 = b \end{cases}$$

con a, b numeri reali arbitrari.

Esercizio 7.

Si tratta di risolvere contemporaneamente i tre sistemi lineari dati da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 4 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dopo due operazioni di EG (sostituire la 2^a riga con la $2^a - \lambda \cdot 1^a$ e la 3^a riga con la $3^a - 2 \cdot 1^a$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2-3\lambda & | & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda - 9 & | & \lambda - 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da cui si deduce che il rango di A_λ è 3 se e solo se $\lambda \neq 3$. Quindi A_λ è invertibile se e solo se $\lambda \neq 3$.

Per trovare l' inversa di A_2 servono altre due operazioni di EG e si arriva a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & | & -2 & 7/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Perciò l'inversa di A_2 è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 7/12 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$