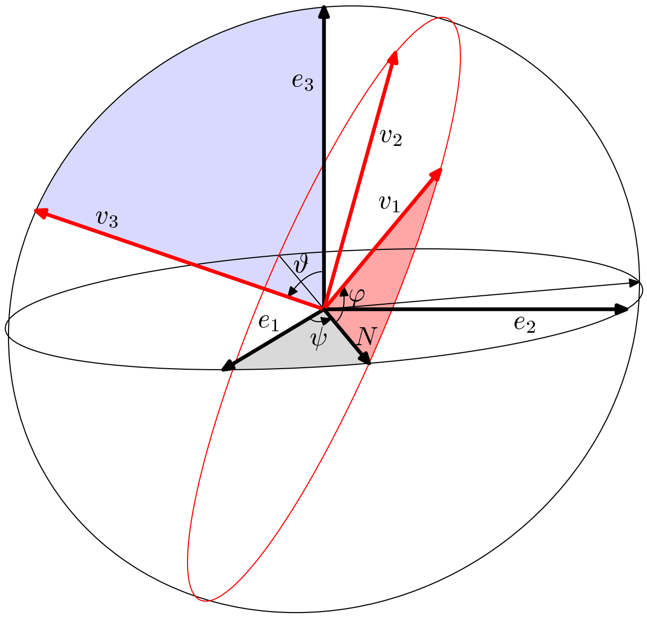
ANGOLI DI EULERO

Ogni trasformazione ortogonale Φ, di determinante 1, è composizione di 3 rotazioni. I tre angoli di rotazione sono gli *Angoli di Eulero* e la loro conoscenza permette di determinare Φ.

Sia $\Phi(e_1) = v_1$, $\Phi(e_2) = v_2$, $\Phi(e_3) = v_3$.



Sia ϑ l'angolo che porta e_3 su v_3. Se $\vartheta = 0$ o $\vartheta = \pi$, allora Φ è una rotazione del piano $\langle e_1, e_2 \rangle$, oppure è la composizione di una tale rotazione con un ribaltamento dell'asse e_3. Altrimenti $\langle e_1, e_2 \rangle \cap \langle v_1, v_2 \rangle$ è una retta detta la *linea dei nodi*. Sia N il versore di tale retta per cui $\vartheta \in [0, \pi]$ ($N = \frac{e_3 \times v_3}{\|e_3 \times v_3\|}$).

Siano poi $\psi \in [0, 2\pi]$ l'ampiezza della rotazione del piano $\langle e_1, e_2 \rangle$ che porta e_1 su N e $\varphi \in [0, 2\pi]$ l'ampiezza della rotazione del piano $\langle v_1, v_2 \rangle$ che porta N su v_1. Allora la trasformazione Φ si decompone in

- rotazione di asse e_3 ed angolo ψ, seguita da
- rotazione di asse N ed angolo ϑ, seguita da
- rotazione di asse v_3 ed angolo φ.

I tre angoli così determinati, prendono rispettivamente il nome di

ψ angolo di PRECESSIONE
φ angolo di ROTAZIONE PROPRIA
ϑ angolo di NUTAZIONE

Vediamo ora come sia possibile determinare la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\Phi)$ a partire dai tre angoli di Eulero.

In base alla decomposizione di Φ, si ha $N = \cos\psi e_1 + \sin\psi e_2$. Si considerino poi i vettori

$$N' = -\sin\psi e_1 + \cos\psi e_2 \in \langle e_1, e_2 \rangle \cap \langle N \rangle^\perp, \qquad N'' = \cos\vartheta N' + \sin\vartheta e_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle \cap \langle N \rangle^\perp,$$

e si osservi che

$$v_1 = \cos\varphi N + \sin\varphi N'', \qquad v_2 = -\sin\varphi N + \cos\varphi N'', \qquad v_3 = -\sin\vartheta N' + \cos\vartheta e_3.$$

Da ciò si ricava

$$A = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta & \sin\psi\sin\vartheta \\ \cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta + \sin\psi\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$