

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA o AEROSPAZIALE

Corso di Matematica 2

Risposte alle domande degli esercizi del 26-10-2002 (tema.4)

1. Siano $U = \langle (0, 1, 1, 0), (1, 0, -1, 2) \rangle$, $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\}$.

- Si determini la dimensione di U e la dimensione di V .
- Si calcoli una base di $U \cap V$.
- Si dica se $U + V$ è somma diretta.

R. • $\dim U = 2$ perché U è generato dalle due quaterne $(0, 1, 1, 0), (1, 0, -1, 2)$ non proporzionali, e quindi linearmente indipendenti.

• $\dim V = 4 - 2 = 2$ per la teoria sui sistemi lineari omogenei. Qui 4 sono le incognite e il rango della matrice del sistema è 2.

• Un vettore arbitrario di U è $u = a(0, 1, 1, 0) + b(1, 0, -1, 2) = (b, a, a - b, 2b)$
 $\forall a, b \in \mathbf{R}$ e $u \in V$ se e solo se u soddisfa il sistema definente V :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \text{ per cui deve risultare } \begin{cases} b + a - (a - b) - 2b = 0 \\ b + a + (a - b) + 2b = 0 \end{cases}$$

da cui $a + b = 0$ e quindi $b = -a, \forall a \in \mathbf{R}$.

$$U \cap V = \{a(0, 1, 1, 0) - a(1, 0, -1, 2) \mid a \in \mathbf{R}\} = \langle (-1, 1, 2, -2) \rangle.$$

• La somma $U + V$ non è diretta perché $U \cap V \neq \{0_{\mathbf{R}^4}\}$.

2. Si scriva la matrice dell'applicazione lineare L_t di \mathbf{R}^3 in se stesso, rispetto alla base canonica, definita dalle tre condizioni

$$L_t(1, 0, 0) = (1, t, -t), \quad L_t(0, 0, 1) = (0, 1, 0), \quad L_t(0, 1, 0) = (-t, 0, 1).$$

- Si dica se esiste qualche valore di t per cui $\dim \ker(L_t) = 2$. Quale?
- Si dica se per $t = 1$ la somma $\ker(L_1) + \text{Im}(L_1)$ è diretta.
- Si calcoli $\text{Im}(L_t)$ nei casi in cui $\dim \text{Im}(L_t) = 2$.
- Si calcolino gli autovalori e gli autospazi dell'applicazione L_1 .

R. • Per scrivere la matrice di una applicazione lineare le basi vanno scelte ordinate (altrimenti la matrice non sarebbe definita!). I vettori della base canonica di \mathbf{R}^3 $\Gamma = (e_1, e_2, e_3)$ hanno come corrispondenti ordinatamente i vettori

$$L_t(e_1) = (1, t, -t), \quad L_t(e_2) = (-t, 0, 1), \quad L_t(e_3) = (0, 1, 0).$$

La matrice di L_t rispetto alla base canonica Γ è pertanto

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ t & 0 & 1 \\ -t & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Ora $\det(A_t) = t^2 - 1$. Ne risulta quindi $\dim \text{Im}(L_t) = \text{rg}(A_t) = 3$ per $t \notin \{-1, 1\}$.

Per $t = -1$ si ha $\text{rg}(A_{-1}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ perché in A_{-1} le prime due righe sono linearmente indipendenti mentre la prima e la terza sono uguali. Per

$t = 1$ $\text{rg}(A_1) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ avendo una situazione

analogia al caso $t = -1$.

Per il teorema delle dimensioni $3 = \text{rg}(A_t) + \dim \ker(L_t)$;

in nessun caso $\dim \ker(L_t) = 2$.

• Si tratta di calcolare

$$\ker(L_1) = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \right\} = \langle (1, 1, -1) \rangle.$$

Ora si ha $\text{Im}(L_1) = \langle (1, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$

(le terne sono scritte come righe anziché come colonne). Ne risulta

$\ker(L_1) \subset \text{Im}(L_1)$ perché qui il generatore dato di $\ker(L_1)$ risulta fra i generatori di $\text{Im}(L_1)$; pertanto la somma $\ker(L_1) + \text{Im}(L_1)$ non è diretta.

• Risulta, come si è notato sopra, che $\dim(\text{Im}(L_t)) = 2$ per $t \in \{-1, 1\}$. Ora abbiamo

$$\text{Im}(L_1) = \langle (1, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle = \langle (-1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle.$$

$$\text{Im}(L_{-1}) = \langle (1, -1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$$

perché in entrambi i casi la prima terna è la differenza delle altre 2.

- Si calcoli il polinomio caratteristico $P(T)$ di A_1 :

$$P(T) = \det \begin{pmatrix} 1-T & -1 & 0 \\ 1 & -T & 1 \\ -1 & 1 & -T \end{pmatrix} = (1-T)(T^2-1) + (1-T) = (1-T)T^2.$$

Abbiamo due soli autovalori: $\lambda = 0$ di molteplicità $\mu(0) = 2$ e $\lambda = 1$.

L'autospazio relativo a $\lambda = 0$ è $V_{\lambda=0} = \ker(L_1) = \langle (1, 1, -1) \rangle$ già trovato.

L'autospazio relativo a $\lambda = 1$ è

$$V_{\lambda=1} = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{cases} -y & = 0 \\ x - y + z & = 0 \\ -x + y - z & = 0 \end{cases} \right\} = \langle (1, 0, -1) \rangle.$$

- 3.** Si consideri il sistema lineare nelle incognite (x_1, x_2, x_3)

$$\Sigma_t : \begin{cases} x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + tx_1 & = & 1+t \\ x_1 + tx_2 & = & 0 \\ x_3 - tx_1 & = & 0 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

- Si dica per quali valori di $t \in \mathbf{R}$ Σ_t ammette soluzioni.
- Si risolva Σ_t per ogni $t \in \mathbf{R}$ determinato sopra.
- Si dica se esiste qualche valore di t per cui Σ_t ha come soluzioni un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^3 . Quale?
- Si dica se per $t = -1$ la somma di due soluzioni è ancora una soluzione.

R. • Si scriva la matrice completa del sistema (prendendo la terza equazione come prima equazione) e la si trasformi in forma canonica per righe:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ t & 1 & 0 & 1+t \\ -t & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-t^2 & 0 & 1+t \\ 0 & t^2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-1 & 1+t \\ 0 & 0 & 1-t^2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-1 & 1+t \\ 0 & 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix}.$$

Ne risulta che:

per $t = 1$ risulta $rg(A) = 2 \neq rg(A, B) = 3$: Σ_1 è incompatibile;

per $t = -1$ risulta $rg(A) = 2 = rg(A, B)$: Σ_1 ammette soluzioni ed è equivalente al sistema

$$\Sigma'_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ le cui soluzioni sono date da } \langle (1, 1, -1) \rangle;$$

per $t \notin \{-1, 1\}$ si ha $rg(A) = 3 \neq rg(AB) = 4$: Σ_t risulta incompatibile.

• Dalla teoria si sa l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^3 solo quando il sistema è omogeneo: ciò avviene per $t = -1$.

• Per $t = -1$ l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^3 e, in quanto tale, contiene anche la somma di suoi arbitrari elementi solo per $t = -1$.

Un altro metodo di affrontare la discussione di tale sistema sta nel riconoscere che la matrice completa di Σ_t è quadrata con determinante $(t+1)(t^2-1)$. Ora se questo non si annulla il rango della matrice completa (A, B) è 4, maggiore del rango di A . Vanno poi esaminati in dettaglio i casi $t = 1, t = -1$.

4. Dopo aver risposto alle domande precedenti, si dica se, giustificando le risposte:

• Siano $A, B \in M_2(\mathbf{R})$, con $A \neq B$, $rg(A) = rg(B) = 2$. Risulta $rg(A+B) = 2$?

R. • La risposta è NO. Ad esempio si prendano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ entrambe di rango 2, ma $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $rg(A+B) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$.

• È possibile costruire un endomorfismo $f \in \text{End}(\mathbf{R}^3)$ per cui risulti

$$\text{Im}(f) = \text{ker}(f)?$$

R. • NO perché, per il Teorema delle dimensioni, si avrebbe $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{ker}(f))$ e

$$3 = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{ker}(f)) = 2\dim(\text{Im}(f))$$

e 3 non è un numero pari.