LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA e AEROSPAZIALE
Corso di Matematica 2
Svolgimento del compito del 26-11-2003 (Tema 1)

Esercizio 1.

- Un endomorfismo è suriettivo se e solo se è iniettivo cioè se e solo se è invertibile. Si tratta pertanto di determinare i valori del parametro reale t tali che $\det(A_t) \neq 0$. Si ha: $\det(A_t) = t(t^2 + 3t - 10)$. Pertanto $\det(A_t) \neq 0$ per ogni $t \neq 0, 2, -5$.

- Dalla risposta precedente sappiamo che per $t = -5$ l'applicazione f_{-5} non è invertibile pertanto $\dim(\ker(f_{-5})) \geq 1$. Ponendo $t = -5$ otteniamo:

$$A_{-5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & -4 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Mediante operazioni elementari sulle righe è possibile ridurre A_{-5} in forma a scalini per righe ottenendo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

di rango 2. Il nucleo della matrice A_{-5} coincide con il nucleo della matrice ottenuta: si ha pertanto $\ker(f_{-5}) = \langle(-3, -2, 1)\rangle$. L'immagine di f_{-5} ha dunque dimensione 2 ed è generata dalle colonne di A_{-5}, pertanto

$$Im(f_{-5}) = \langle(1, 2, -5), (1, -5, 5)\rangle.$$

- Consideriamo la matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamone il polinomio caratteristico $p_{A_0}(\lambda)$:

$$p_{A_0}(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2).$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$. La matrice A_0 ha dunque tre autovalori distinti ed è pertanto diagonalizzabile.

Determiniamo gli autospazi di A_0:

$V_0 = \ker(A) = \langle(1, -1, 1/2)\rangle;$

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \langle(1, 1, 0)\rangle;$$

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle(1, -2, 0)\rangle.$$

- Si tratta di stabilire per quali valori di t l'immagine del vettore $(3, -1, 0)$ mediante l'applicazione f_t è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$. Naturalmente il vettore $f_t(3, -1, 0)$ si ottiene mediante il prodotto righe per colonne della matrice A_t per il vettore $(3, -1, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -t \\ 2 & t & -4 \\ t & -t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6-t \\ 4t \end{pmatrix}.$$

  Osserviamo che il vettore ottenuto è diverso dal vettore nullo per ogni valore di t. Pertanto non esiste alcun valore di t per cui $(3, -1, 0) \in \ker(f_t)$.

Esercizio 2.

1. Sia $v = (a, b, c)$ il vettore direttore della retta richiesta s. Dal momento che s giace sul piano π le componenti di v devono soddisfare l'equazione della giacitura di π, cioè l'equazione stessa di π dal momento che questa è omogenea. Si ha pertanto:
$$a - b + c = 0.$$
Inoltre s è ortogonale alla retta r che ha direzione $v_r = (2, 0, 1)$, pertanto:
$$2a + c = 0.$$
Risolvendo il sistema $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases}$ otteniamo la giacitura della retta s: $\langle(1, -1, -2)\rangle$. Poiché s passa per il punto $O = (0, 0, 0)$ si ha: $s : \langle(1, -1, -2)\rangle$ cioè:
$$s : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -2t. \end{cases}$$

2. La giacitura della retta r: $v_r = (2, 0, 1)$ non appartiene alla giacitura del piano π, si ha infatti: $2 + 1 \neq 0$, pertanto non può esistere alcuna retta parallela ad r appartenente al piano π.

3. Le rette r ed s sono ortogonali per costruzione dunque non sono certamente parallele. Si tratta di stabilire se sono incidenti o meno. Confrontando le equazioni parametriche delle due rette si ottiene che esse hanno in comune il punto $Q = (-1, 1, 2)$ dunque la distanza fra le due rette è nulla.

4. La proiezione ortogonale di r su π è la retta intersezione del piano π con il piano ad esso ortogonale contenente la retta r.

   La retta r ha equazioni cartesiane: $\begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ pertanto il fascio di piani contenenti r ha equazione:

$$\alpha(x - 2z + 5) + \beta(y - 1) = 0.$$

   Determiniamo il piano del fascio ortogonale a π: la direzione ad esso ortogonale deve essere ortogonale all'ortogonale di π:

$$(\alpha, \beta, -2\alpha) \cdot (1, -1, 1) = \alpha - \beta - 2\alpha = -\alpha - \beta = 0$$

   da cui: $\beta = -\alpha$. Il piano contenente r ortogonale a π ha dunque equazione: $x - y - 2z + 6$. Pertanto la retta proiezione ortogonale di r su π ha equazioni:

$$\begin{cases} x - y - 2z + 6 = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

5. Abbiamo già l'equazione del fascio di piani per r. La distanza del punto $O = (0, 0, 0)$ da un generico piano del fascio è: $\frac{|5\alpha - \beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha^2}}$. Si tratta dunque di risolvere l'equazione:

$$\frac{|5\alpha - \beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha^2}} = 1,$$

   vale a dire di determinare gli α e β tali che: $(5\alpha - \beta)^2 = 5\alpha^2 + \beta^2$. Si ottiene: $\alpha(2\alpha - \beta) = 0$ da cui: $\alpha = 0$ o $2\alpha = \beta$.

   Per $\alpha = 0$ si ottiene il piano di equazione $y - 1 = 0$;

   per $2\alpha = \beta$ si ottiene il piano di equazione $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

Esercizio 3.

1. U_1 ha dimensione 1 ed una sua base è data da: $\{(-2, 1, 1)\}$.

2. Si ha: $U_1^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + z = 0\} = \langle (0, 1, -1), (1, 1, 1) \rangle$;
   $U_2^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\} = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 0) \rangle$.

3. $U_1 + U_2 = \langle(-2,1,1),(1,0,1)\rangle$. Si ha $\dim(U_1 + U_2) = 2$ dal momento che i vettori $(-2,1,1),(1,0,1)$ sono linearmente indipendenti. Per definizione di sottospazio ortogonale si ha dunque:

$$(U_1 + U_2)^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \}$$

che, come è evidente, è il sistema delle equazioni di $U_1^\perp$ e $U_2^\perp$. L'uguaglianza è pertanto verificata.