

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

CORSO DI MATEMATICA 2

Padova 18-03-05

I appello

TEMA n.1

Esercizio 1. Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è compatibile. Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} x - y + kz = 1 \\ kx - ky + z = 1 \\ x + ky = 1 - k. \end{cases}$$

Esercizio 2. *i)* Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$. Trovare una base di V e calcolare la sua dimensione. Mostrare che il vettore $(1, 1, 1) \notin V$.

ii) Scrivere la matrice della applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(1, 1, 1) = (1, 2)$ e $\text{Ker } f = V$, rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e di \mathbb{R}^2 .

iii) Determinare per quali valori di k il vettore $(k, k^2 + 1) \in \text{Im } f$.

iv) Determinare una base ortonormale di V .

v) Determinare un sottospazio vettoriale M di \mathbb{R}^3 tale che $V \oplus M = \mathbb{R}^3$. Tale sottospazio è unico? Con la scelta fatta di M , determinare $f(M)$. È vero o falso che per ogni possibile scelta di M , $f(M)$ è sempre lo stesso?

Esercizio 3. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ a & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia f_a l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 associato a B_a rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

i) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la dimensione ed una base di $\text{Ker } f_a$.

ii) Discutere la diagonalizzabilità di B_a al variare di $a \in \mathbb{R}$.

iii) Per quali valori di a , l'immagine di f_a e l'immagine di $f_a \circ f_a$ hanno la stessa dimensione?

iv) Sia $w = (1, 1, 0)$, per quali valori di a il sottospazio $\langle w, f_a(w) \rangle$ di \mathbb{R}^3 ha dimensione 1?

Esercizio 4. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni rispettivamente

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ 2x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

i) Determinare la posizione reciproca di r_1 e r_2 e calcolare la loro distanza.

ii) Determinare una retta s che intersechi le rette r_1 e r_2 e passi per il punto $P = (-1, 0, 1)$.

iii) Determinare il piano contenente le rette r_1 e s .

iv) Determinare, se possibile, un piano contenente la retta r_1 e ortogonale alla retta r_2 .

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

CORSO DI MATEMATICA 2

Padova 18-03-05

I appello

TEMA n.2

Esercizio 1. Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è compatibile. Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} -x + y + kz = 1 \\ -kx + ky + z = 1 \\ kx + y = 1 - k. \end{cases}$$

Esercizio 2. *i)* Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 0\}$. Trovare una base di V e calcolare la sua dimensione. Mostrare che il vettore $(0, 1, -1) \notin V$.

ii) Scrivere la matrice della applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(0, 1, -1) = (2, -4)$ e $\text{Ker} f = V$, rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e di \mathbb{R}^2 .

iii) Determinare per quali valori di k il vettore $(k^2, k) \in \text{Im} f$.

iv) Determinare una base ortonormale di V .

v) Determinare un sottospazio vettoriale M di \mathbb{R}^3 tale che $V \oplus M = \mathbb{R}^3$. Tale sottospazio è unico? Con la scelta fatta di M , determinare $f(M)$. È vero o falso che per ogni possibile scelta di M , $f(M)$ è sempre lo stesso?

Esercizio 3. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia f_a l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 associato a B_a rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

i) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la dimensione ed una base di $\text{Ker} f_a$.

ii) Discutere la diagonalizzabilità di B_a al variare di $a \in \mathbb{R}$.

iii) Per quali valori di a , l'immagine di f_a e l'immagine di $f_a \circ f_a$ hanno la stessa dimensione?

iv) Sia $w = (1, 1, 0)$, per quali valori di a il sottospazio $\langle w, f_a(w) \rangle$ di \mathbb{R}^3 ha dimensione 1?

Esercizio 4. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni rispettivamente

$$r_1 : \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

i) Determinare la posizione reciproca di r_1 e r_2 e calcolare la loro distanza.

ii) Determinare una retta s che intersechi le rette r_1 e r_2 e passi per il punto $P = (-1, -1, 0)$.

iii) Determinare il piano contenente le rette r_1 e s .

iv) Determinare, se possibile, un piano contenente la retta r_1 e ortogonale alla retta r_2 .

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

CORSO DI MATEMATICA 2

Padova 18-03-05

I appello

TEMA n.3

Esercizio 1. Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è compatibile. Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} -x + y - kz = 1 \\ kx - ky + z = 1 \\ -x + ky = 1 - k. \end{cases}$$

Esercizio 2. *i)* Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - z = 0\}$. Trovare una base di V e calcolare la sua dimensione. Mostrare che il vettore $(0, 1, 1) \notin V$.

ii) Scrivere la matrice della applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(0, 1, 1) = (2, 4)$ e $\text{Ker} f = V$, rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e di \mathbb{R}^2 .

iii) Determinare per quali valori di k il vettore $(k^2, k) \in \text{Im} f$.

iv) Determinare una base ortonormale di V .

v) Determinare un sottospazio vettoriale M di \mathbb{R}^3 tale che $V \oplus M = \mathbb{R}^3$. Tale sottospazio è unico? Con la scelta fatta di M , determinare $f(M)$. È vero o falso che per ogni possibile scelta di M , $f(M)$ è sempre lo stesso?

Esercizio 3. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} -2 & a & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia f_a l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 associato a B_a rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

i) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la dimensione ed una base di $\text{Ker} f_a$.

ii) Discutere la diagonalizzabilità di B_a al variare di $a \in \mathbb{R}$.

iii) Per quali valori di a , l'immagine di f_a e l'immagine di $f_a \circ f_a$ hanno la stessa dimensione?

iv) Sia $w = (1, 1, 0)$, per quali valori di a il sottospazio $\langle w, f_a(w) \rangle$ di \mathbb{R}^3 ha dimensione 1?

Esercizio 4. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni rispettivamente

$$r_1 : \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} y - 2 = 0 \\ x - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

i) Determinare la posizione reciproca di r_1 e r_2 e calcolare la loro distanza.

ii) Determinare una retta s che intersechi le rette r_1 e r_2 e passi per il punto $P = (2, -1, 0)$.

iii) Determinare il piano contenente le rette r_1 e s .

iv) Determinare, se possibile, un piano contenente la retta r_1 e ortogonale alla retta r_2 .

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

CORSO DI MATEMATICA 2

Padova 18-03-05

I appello

TEMA n.4

Esercizio 1. Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è compatibile. Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} -2x + (1+k)y - kz = 2 - k \\ (k-1)y + kz = -k \\ kx - ky + z = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2. *i)* Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y - z = 0\}$. Trovare una base di V e calcolare la sua dimensione. Mostrare che il vettore $(1, 1, 1) \notin V$.

ii) Scrivere la matrice della applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(1, 1, 1) = (1, -1)$ e $\text{Ker} f = V$, rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e di \mathbb{R}^2 .

iii) Determinare per quali valori di k il vettore $(k^2, k) \in \text{Im} f$.

iv) Determinare una base ortonormale di V .

v) Determinare un sottospazio vettoriale M di \mathbb{R}^3 tale che $V \oplus M = \mathbb{R}^3$. Tale sottospazio è unico? Con la scelta fatta di M , determinare $f(M)$. È vero o falso che per ogni possibile scelta di M , $f(M)$ è sempre lo stesso?

Esercizio 3. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ a & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia f_a l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 associato a B_a rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

i) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la dimensione ed una base di $\text{Ker} f_a$.

ii) Discutere la diagonalizzabilità di B_a al variare di $a \in \mathbb{R}$.

iii) Per quali valori di a , l'immagine di f_a e l'immagine di $f_a \circ f_a$ hanno la stessa dimensione?

iv) Sia $w = (1, 1, 0)$, per quali valori di a il sottospazio $\langle w, f_a(w) \rangle$ di \mathbb{R}^3 ha dimensione 1?

Esercizio 4. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni rispettivamente

$$r_1 : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} y - 2 = 0 \\ x - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

i) Determinare la posizione reciproca di r_1 e r_2 e calcolare la loro distanza.

ii) Determinare una retta s che intersechi le rette r_1 e r_2 e passi per il punto $P = (-1, 2, -1)$.

iii) Determinare il piano contenente le rette r_1 e s .

iv) Determinare, se possibile, un piano contenente la retta r_1 e ortogonale alla retta r_2 .

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.