LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA ed AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 11-02-05
I prova parziale
Correzione del tema n.1

Esercizio 1. Dato il sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\Sigma_{a,b}: \begin{cases} x + (2+a)y = b \\ (2+2a)x + 3y - (b+1)z = 1+b \\ bx + by - (b+4)z = b^2 + 3b. \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il sistema omogeneo associato ammette la soluzione $(a, -a, 0)$.

b) Dire per quali tra i valori a, b trovati al punto precedente il sistema $\Sigma_{a,b}$ è risolubile e determinarne le soluzioni.

Svolgimento. Sostituendo $(x, y, z) = (a, -a, 0)$ nel sistema omogeneo:

$$\begin{cases} a - a^2 - 2a = -a(a+1) = 0 \\ 2a + 2a^2 - 3a = a(2a-1) = 0 \\ ba - ba = 0 \end{cases}$$

si trova la condizione $a = 0$.
Per $a = 0$ la matrice completa del sistema ed una sua forma a scala sono:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b \\ 2 & 3 & -b-1 & b+1 \\ b & b & -b-4 & b^2+3b \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b \\ 0 & 1 & b+1 & b-1 \\ 0 & 0 & (b+2)(b-2) & b(b+2) \end{array}\right).$$

Quindi per $b \neq \pm 2$, poiché il rango della matrice incompleta è 3 e coincide con il rango della matrice completa, il sistema è risolubile ed ha un'unica soluzione. Risolvendo a ritroso si trova che la soluzione è $(\frac{b^2+6b-4}{b-2}, \frac{-4b+2}{b-2}, \frac{b}{b-2})$.
Per $b = -2$ il rango della matrice incompleta è 2 e coincide con il rango della matrice completa. Pertanto il sistema è risolubile e le soluzioni dipendono da 1 parametro. Risolvendo a ritroso si trova che l'insieme delle soluzioni è la varietà lineare $(4, -3, 0) + < (-2, 1, 1) >$.
Per $b = 2$ il rango della matrice incompleta è 2 e il rango della matrice completa è 3, pertanto il sistema non è risolubile.

Soluzioni del tema 2. La condizione è $a = 0$. Per $b \neq \pm 2$ il sistema ha un'unica soluzione $(\frac{b^2+7b+4}{b+2}, \frac{4b+2}{b+2}, \frac{b}{b+2})$. Per $b = 2$ l'insieme delle soluzioni è $(6, 3, 0) + < (-1, -1, 1) >$. Per $b = -2$ il sistema non è risolubile.

Soluzioni del tema 3. La condizione è $a = 0$. Per $b \neq 0, 1$ il sistema ha un'unica soluzione $(-b, 2b+1, \frac{b+1}{b})$. Per $b = 1$ l'insieme delle soluzioni è $(1, 1, 0) + < (-1, 1, 1) >$. Per $b = 0$ il sistema non è risolubile.

Soluzioni del tema 4. La condizione è $a = 0$. Per $b \neq 0, -1$ il sistema ha un'unica soluzione $(7b-3, 3b-1, \frac{b-1}{b})$. Per $b = -1$ l'insieme delle soluzioni è $(-6, -2, 0) + < (-2, -1, 1) >$. Per $b = 0$ il sistema non è risolubile.

Esercizio 2. Sia $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) |\, A\binom{1}{1} = \binom{0}{0}\}$.

a) Dimostrare che S è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ e determinarne una base.

b) Sia $T = \langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \rangle$. Determinare una base per $S+T$. Tale somma è diretta?

c) Esiste un sottospazio $W \subseteq M_2(\mathbb{R})$ tale che $(S+T) \oplus W = M_2(\mathbb{R})$? In tal caso, determinarne uno.

Svolgimento. Poiché $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$, abbiamo che

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \begin{cases} a+b=0 \\ c+d=0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix} | \, a, c \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Per determinare $S+T$ riportiamo in matrice le coordinate dei generatori trovati di S e dei generatori dati di T rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$ e riduciamo tale matrice in forma a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

da cui ricaviamo che $S+T = < \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} >$. In particolare, $\dim(S+T) = 3$. Dalla formula di Grassmann, otteniamo: $\dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S+T) = 2+2-3 = 1$. Pertanto la somma $S+T$ non è diretta.
Poiché $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, per la formula di Grassmann, $\dim W = 4 - \dim(S+T) = 1$. Dalla riduzione (1), riconosciamo che la matrice di coordinate $(0,0,0,1)$ rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, cioè $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non appartiene a $S+T$ e può quindi essere scelta come base di W.

Soluzioni del tema 2. $S = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$; $S+T = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$.
La somma non è diretta. Si può scegliere $W = < \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >$.

Soluzioni del tema 3. $S = \langle \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$;
$S+T = \langle \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$. La somma non è diretta.
Si può scegliere $W = < \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >$.

Soluzioni del tema 4. $S = \langle \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rangle$;
$S+T = \langle \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rangle$. La somma non è diretta.
Si può scegliere $W = < \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >$.

Esercizio 3. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare f_α di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$f_\alpha(x, y, z) = (-x + (2-\alpha)y + z, x - y + z, x - y + (4-\alpha)z).$$

a) Scrivere la matrice associata a f_α rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare i valori di α per i quali f_α è iniettiva.

c) Determinare i valori di α per i quali il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene a $\mathrm{I}m\, f_\alpha$.

d) Posto $\alpha = 1$, determinare il nucleo dell'applicazione lineare f_1.

e) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{I}m\, g = \mathrm{I}m\, f_0$.

f) Costruire, se possibile, una applicazione lineare suriettiva $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker h = \ker f_1$.

Svolgimento. a) La matrice associata all'applicazione lineare f_α rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4-\alpha \end{pmatrix}.$$

b) Poiché f_α è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, per il teorema delle dimensioni, f_α è una applicazione iniettiva se e solo se è suriettiva, cioè se e solo se il rango della matrice A_α è uguale a 3. Riducendo la matrice A_α a scala si trova:

$$rg(A_\alpha) = rg \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 3-\alpha \end{pmatrix}.$$

Pertanto si ha: $rg(A_\alpha) = 3$ per ogni $\alpha \neq 1, 3$. Dunque l'applicazione f_α è iniettiva per ogni $\alpha \neq 1, 3$.

c) Per quanto appena osservato, per ogni $\alpha \neq 1, 3$ si ha $\mathrm{I}m\, f_\alpha = \mathbb{R}^3$. Pertanto, per ogni $\alpha \neq 1, 3$, il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene a $\mathrm{I}m\, f_\alpha$.
Si tratta di studiare che cosa succede quando $\alpha = 1$ e quando $\alpha = 3$.
Se $\alpha = 1$, $rg(A_\alpha) = 2$ e $\mathrm{I}m\, f_\alpha = \langle(-1, 1, 1), (1, 1, 3)\rangle$. Ci chiediamo se, in questo caso, il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene a $\mathrm{I}m\, f_\alpha$, cioè se è linearmente dipendente dai vettori $\{(-1, 1, 1), (1, 1, 3)\}$. Calcoliamo il rango della matrice che ha sulle righe i 3 vettori in questione:

$$rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3.$$

I vettori $(-1, 1, 1)$, $(1, 1, 3)$ e $(1, 1, 1)$ sono dunque linearmente indipendenti. Pertanto, se $\alpha = 1$, il vettore $(1, 1, 1)$ non appartiene a $\mathrm{I}m\, f_\alpha$.
Infine, sia $\alpha = 3$. Allora $rg(A_\alpha) = 2$ e $\mathrm{I}m\, f_\alpha = \langle(-1, 1, 1), (-1, -1, -1)\rangle$. In particolare $(1, 1, 1)$ appartiene certamente a $\mathrm{I}m\, f_\alpha$.
In conclusione, il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene a $\mathrm{I}m\, f_\alpha$ per ogni $\alpha \neq 1$.

d) Per $\alpha = 1$ la matrice ridotta a scala è la seguente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\ker f_1$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ 2z=0 \end{cases}$, cioè il sottospazio vettoriale $\langle(1,1,0)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

e) Per quanto osservato rispondendo alla domanda (b), $\mathrm{I}m\, f_0 = \mathbb{R}^3$. Pertanto una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{I}m\, g = \mathrm{I}m\, f_0$ non esiste. Infatti, per il teorema delle dimensioni, deve essere $\dim(\mathrm{I}m\, g) \leq 2$.

f) Dalla risposta alla domanda (d) sappiamo che $\ker f_1 = \langle(1,1,0)\rangle$, pertanto le condizioni date sono compatibili con il teorema delle dimensioni, infatti: $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker h + \dim \mathrm{I}m\, h = 1+2$. Per costruire h completiamo l'insieme $\{(1,1,0)\}$ in una base di $\mathbb{R}^3$, ad esempio aggiungendo i vettori $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Si ha: $h(1,1,0) = (0,0)$. Poiché h deve essere suriettiva, le immagini dei vettori $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ devono essere linearmente indipendenti. Un modo di definire h è il seguente:

$$h(1,1,0) = (0,0), \quad h(0,1,0) = (1,0), \quad h(0,0,1) = (0,1).$$

Soluzioni del tema 2. a)

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2-\alpha \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4-\alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $\alpha \neq 1, 3$. c) $\alpha \neq 1$. d) $\ker f_1 = \langle(1,0,1)\rangle$. e) g non esiste. f) Possibile h: $h(1,0,1) = (0,0)$, $h(0,1,0) = (1,0)$, $h(0,0,1) = (0,1)$.

Soluzioni del tema 3. a)

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 1-\alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3-\alpha \end{pmatrix}.$$

b) $\alpha \neq 0, 2$. c) $\alpha \neq 0$. d) $\ker f_2 = \langle(0,1,1)\rangle$. e) g non esiste. f) Possibile h: $h(0,1,1) = (0,0)$, $h(1,0,0) = (1,0)$, $h(0,0,1) = (0,1)$.

Soluzioni del tema 4. a)

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1-\alpha \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3-\alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $\alpha \neq 0, 2$. c) $\alpha \neq 0$. d) $\ker f_0 = \langle(1,0,1)\rangle$. e) g non esiste. f) Possibile h: $h(1,0,1) = (0,0)$, $h(1,0,0) = (1,0)$, $h(0,0,1) = (0,1)$.