

**I appello Matematica 2, Ingegneria Meccanica, 18/03/05**  
**Soluzione degli esercizi, Tema n.1**

**Esercizio 1** La matrice completa associata al sistema dato è:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 1 \\ k & -k & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 & 1-k \end{array} \right)$$

che può essere ridotta a scala nella forma seguente:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 1 \\ 0 & k+1 & -k & -k \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 1-k \end{array} \right).$$

Il sistema ha perciò:

1. l'unica soluzione  $(\frac{1+k-k^2}{(1+k)^2}, -\frac{k^2}{(1+k)^2}, \frac{1}{1+k})$  per  $k \neq \pm 1$ ;
2. infinite soluzioni della forma  $(1/2 - t, -1/2 + t, 2t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , per  $k = 1$ ;
3. nessuna soluzione per  $k = -1$ .

**Esercizio 2** (i) Il sottospazio vettoriale  $V$  consiste dei vettori di  $\mathbb{R}^3$  della forma  $(x, y, 2x + y)$ , al variare di  $x, y \in \mathbb{R}$ . Pertanto  $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$  è una base di  $V$  e  $\dim(V) = 2$ . Per osservare che il vettore  $(1, 1, 1)$  non appartiene a  $V$  basta notare che le sue componenti non soddisfano l'equazione di  $V$ :  $2 + 1 - 1 \neq 0$ .

(ii) Dal momento che  $(1, 1, 1)$  non appartiene a  $V$  e  $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$  è una base di  $V$ , l'insieme  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ . Pertanto l'applicazione  $f$  è univocamente definita dalle condizioni:  $f(1, 1, 1) = (1, 2)$ ,  $f(1, 0, 2) = (0, 0)$ ,  $f(0, 1, 1) = (0, 0)$  ( $\ker(f) = V$ ). La matrice associata a  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  nel dominio e alla base canonica nel codominio è dunque:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si tratta a questo punto di cambiare base nel dominio. Detta  $M_C^{\mathcal{B}}$  la matrice di passaggio dalla base canonica alla base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$ , la matrice richiesta sarà  $B = AM_C^{\mathcal{B}}$ . Facendo i calcoli si ottiene:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Dal momento che  $Im(f) = \langle (1, 2) \rangle$ , il vettore  $(k, k^2 + 1)$  appartiene a  $Im(f)$  se e solo se è un multiplo di  $(1, 2)$  cioè se e solo se  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & k^2 + 1 \end{pmatrix} = 0$ . Calcolando il determinante si ottiene la condizione  $k = 1$ .

(iv) Fissata, ad esempio, la base  $\{1, 0, 2\}, \{0, 1, 1\}$  di  $V$  basta utilizzare il procedimento di Gram-Schmidt. Si ottiene la base ortonormale  $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2), \frac{1}{\sqrt{30}}(-2, 5, 1)\}$ .

(v) Determinare il sottospazio  $M$  equivale a completare la base fissata di  $V$  in una base di  $\mathbb{R}^3$ . Esistono dunque infinite scelte possibili per  $M$ , ad esempio,  $M = \langle (0, 0, 1) \rangle$ .

Qualsiasi sia  $M = \langle v_3 \rangle$ , sappiamo che l'immagine di  $f$  è generata da  $f(1, 0, 2)$ ,  $f(0, 1, 1)$  e  $f(v_3)$ . Dal momento che  $\ker(f) = V$ , abbiamo:  $f(1, 0, 2) = (0, 0)$  e  $f(0, 1, 1) = (0, 0)$ , dunque  $Im(f) = \langle f(v_3) \rangle = f(M)$ . Questo significa che, qualsiasi sia la scelta di  $M$  come richiesto, si ha sempre  $f(M) = Im(f) = \langle (1, 2) \rangle$ .

**Esercizio 3** (i) Riducendo la matrice  $B_a$  in forma a scala per righe, si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 - a \end{pmatrix}.$$

Ne deduciamo che, per ogni  $a \neq -6$ ,  $rg(B_a) = 3$ , vale a dire  $\ker(f_a) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ . Per  $a = -6$ ,  $rg(B_a) = 2$  e  $\ker(f_a) = \langle (-1, 3, 1) \rangle$ .

(ii) Il polinomio caratteristico della matrice  $B_a$  è:  $p_{B_a}(t) = (1 - t)(t^2 - t - 6 - a)$ . Il polinomio  $t^2 - t - 6 - a$  ha 2 radici reali se e solo se  $a \geq -\frac{25}{4}$ . In questo caso le radici di  $p_{B_a}(t)$  sono  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = \frac{1 + \sqrt{25 + 4a}}{2}$ ,  $t_3 = \frac{1 - \sqrt{25 + 4a}}{2}$ . Tali radici coincidono se  $a = -6$  ( $t_2 = t_1 = 1$ ), oppure se  $a = -\frac{25}{4}$  ( $t_2 = t_3 = \frac{1}{2}$ ). Ne deduciamo che per ogni valore di  $a > -\frac{25}{4}$ ,  $a \neq -6$ , la matrice  $B_a$  ha tre autovalori reali distinti ed è pertanto diagonalizzabile.

Si tratta ora di analizzare che cosa succede per  $a = -\frac{25}{4}$  o  $a = -6$ . Se  $a = -\frac{25}{4}$  la matrice  $B_a$  ha un autovalore  $t_1 = 1$  di molteplicità algebrica 1 ed un autovalore  $t_2 = \frac{1}{2}$  di molteplicità algebrica 2. Si ha inoltre:

$$\dim(V_{\frac{1}{2}}) = 3 - rg \begin{pmatrix} 5/2 & 1 & 0 \\ -25/4 & -5/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = 1.$$

Dunque, per  $a = -\frac{25}{4}$  la matrice  $B_a$  non è diagonalizzabile.

Se  $a = -6$  la matrice  $B_a$  ha un autovalore  $t_1 = 1$  di molteplicità algebrica 2 ed un autovalore  $t_3 = 0$  di molteplicità algebrica 1. Si ha inoltre:

$$\dim(V_1) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Dunque, per  $a = -6$  la matrice  $B_a$  non è diagonalizzabile.

(iii) Per  $a \neq -6$  l'applicazione  $f_a$  è biunivoca. Di conseguenza anche l'applicazione  $f_a \circ f_a$  è biunivoca. Pertanto per  $a \neq -6$   $\operatorname{Im}(f_a) = \operatorname{Im}(f_a \circ f_a) = \mathbb{R}^3$ .

Per  $a = -6$  sappiamo che  $\operatorname{rg}(B_a) = 2$ . Si tratta ora di calcolare il rango della matrice  $B_a B_a$ . Si ottiene che, anche per  $a = -6$ ,  $\operatorname{rg}(B_a) = \operatorname{rg}(B_a B_a)$ .

(iv) Utilizzando il prodotto righe per colonne si ottiene subito  $f_a(w) = (4, a-2, 1)$ . Poiché per nessun valore di  $a$  il vettore  $(4, a-2, 1)$  è un multiplo del vettore  $(1, 1, 0)$ , per nessun valore di  $a$  si ha  $\dim\langle w, f_1 w \rangle = 1$ .

**Esercizio 4** (i) Le rette  $r_1$  e  $r_2$  sono sghembe. Per determinare la loro distanza si può procedere come segue:

- determinare il piano  $\pi$  contenente  $r_1$  parallelo alla retta  $r_2$ . Si tratta di uno dei piani del fascio di asse  $r_1$ :

$$\alpha(x - 2y + z) + \beta(x - y + 5) = 0$$

la cui giacitura contenga lo spazio direttore  $\langle(3, 1, 5)\rangle$  della retta  $r_2$ . Facendo i calcoli si ottiene il piano  $\pi : -2x + y + z - 15 = 0$ .

Ora la distanza della retta  $r_1$  dalla retta  $r_2$  è data dalla distanza di un qualsiasi punto di  $r_2$ , ad esempio il punto  $R = (-2, 0, -3)$ , dal piano  $\pi$ . Si ottiene  $d(r_1, r_2) = \frac{14}{\sqrt{6}}$ .

(ii) La retta  $s$  è intersezione dei piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  rispettivamente contenenti la retta  $r_1$  ed il punto  $P$  e la retta  $r_2$  ed il punto  $P$ :

$$s : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 4x - 7y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

(iii) Si tratta del piano passante per il punto  $P$  e il cui spazio direttore contiene sia lo spazio direttore di  $s$  che quello di  $r_1$ :  $(-1, 0, 1) + \langle(9, 5, 1), (1, 1, 1)\rangle$ .

(iv) Affinché un siffatto piano esista la retta  $r_1$  e la retta  $r_2$  devono essere ortogonali. Poiché lo spazio direttore di  $r_1$  è  $\langle(1, 1, 1)\rangle$  e lo spazio direttore di  $r_2$  è  $\langle(3, 1, 5)\rangle$ , un piano come richiesto non esiste.