

**CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA,
CHIMICA-MATERIALI**

Padova 21-03-06

I appello

TEMA n.1

Esercizio 1. Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 , ammette soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 11x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + (k - k^2)x_3 + (5 - k^2)x_4 = -k^2 - 3 \\ -x_2 + 2(k^2 - k)x_3 + (3k^2 - 4)x_4 = 2(k^2 + k - 4) \end{cases}$$

Risolvere il sistema per i valori di k per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 2. Data l'applicazione lineare $f_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f_s(x, y, z) = (4x + (s - 4)y, 2x + (s - 2)y, (s - 2)x + (2 - s)y + sz),$$

- i)* scrivere la matrice A_s associata ad f_s rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 ;
- ii)* determinare nucleo ed immagine di f_s al variare del parametro reale s ;
- iii)* determinare, al variare di $s \in \mathbb{R}$, un sottospazio T_s di \mathbb{R}^3 tale che $\ker f_s \oplus T_s = \mathbb{R}^3$;
- iv)* stabilire per quali valori del parametro reale s la matrice A_s è diagonalizzabile su \mathbb{R} ;
- v)* per ognuno dei valori trovati in *iv)* determinare una base \mathcal{B}_s di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori di A_s ;
- vi)* posto $s = 4$ si ortonormalizzi la base \mathcal{B}_4 . Si ottiene in questo modo una base ortonormale di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori della matrice A_4 ?
- vii)* Determinare la matrice associata ad f_s rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ nel codominio.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione tre si considerino i punti $A = (1, 5, 1)$, $B = (5, 4, 2)$, $C = (1, 8, 4)$.

- a)* Mostrare che i punti A, B, C non sono allineati e determinare il piano π che li contiene;
- b)* determinare, se possibile, un punto D tale che il quadrilatero di vertici A, B, C, D sia un quadrato;
- c)* scrivere le equazioni cartesiane della retta r ortogonale al piano π e passante per B ;
- d)* calcolare la distanza della retta r dalla retta s passante per $(0, 0, 0)$ e parallela al vettore $v = (1, 2, -1)$;
- e)* determinare il luogo dei punti equidistanti dai punti A, B, C . È una varietà lineare? Se sì, di quale dimensione?

Esercizio 4. Determinare tutti i sottospazi U di \mathbb{R}^3 tali che la proiezione ortogonale di $(1, 2, 0)$ su U sia $(1, 1, 1)$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

**CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA,
CHIMICA-MATERIALI**

Padova 21-03-06

I appello

TEMA n.2

Esercizio 1. Si dica per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 , ammette soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = -4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 13x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 - (h + h^2)x_3 + (4 - h^2 - 2h)x_4 = -4 - h^2 - 2h \\ -x_2 + 2h(1 + h)x_3 + (3h^2 + 6h - 1)x_4 = 2(h^2 + 3h - 2) \end{cases}$$

Risolvere il sistema per i valori di h per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 2. Data l'applicazione lineare $g_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$g_s(x, y, z) = (4x + (s - 1)y, 2x + (s + 1)y, (s + 1)x - (1 + s)y + (s + 3)z),$$

- i)* scrivere la matrice A_s associata a g_s rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 ;
- ii)* determinare nucleo ed immagine di g_s al variare del parametro reale s ;
- iii)* determinare, al variare di $s \in \mathbb{R}$, un sottospazio T_s di \mathbb{R}^3 tale che $\ker g_s \oplus T_s = \mathbb{R}^3$;
- iv)* stabilire per quali valori del parametro reale s la matrice A_s è diagonalizzabile su \mathbb{R} ;
- v)* per ognuno dei valori trovati in *iv)* determinare una base \mathcal{B}_s di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori di A_s ;
- vi)* posto $s = 1$ si ortonormalizzi la base \mathcal{B}_1 . Si ottiene in questo modo una base ortonormale di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori della matrice A_1 ?
- vii)* Determinare la matrice associata a g_s rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ nel codominio.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione tre si considerino i punti $A = (-1, 4, -1)$, $B = (2, 7, -1)$, $C = (0, 3, 3)$.

- a)* Mostrare che i punti A, B, C non sono allineati e determinare il piano π che li contiene;
- b)* determinare, se possibile, un punto D tale che il quadrilatero di vertici A, B, C, D sia un quadrato;
- c)* scrivere le equazioni cartesiane della retta r ortogonale al piano π e passante per B ;
- d)* calcolare la distanza della retta r dalla retta s passante per $(0, 0, 0)$ e parallela al vettore $v = (0, 2, -1)$;
- e)* determinare il luogo dei punti equidistanti dai punti A, B, C . È una varietà lineare? Se sì, di quale dimensione?

Esercizio 4. Determinare tutti i sottospazi U di \mathbb{R}^3 tali che la proiezione ortogonale di $(0, 2, 1)$ su U sia $(1, 1, 1)$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

**CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA,
CHIMICA-MATERIALI**

Padova 21-03-06

I appello

TEMA n.3

Esercizio 1. Si dica per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 , ammette soluzioni:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 11x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + (h - h^2)x_3 + (5 - h^2)x_4 = -h^2 - 3 \\ -x_1 + 2(h^2 - h)x_3 + (3h^2 - 4)x_4 = 2(h^2 + h - 4) \end{cases}$$

Risolvere il sistema per i valori di h per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 2. Data l'applicazione lineare $f_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f_s(x, y, z) = (4x + (s - 5)y, 2x + (s - 3)y, (s - 3)x + (3 - s)y + (s - 1)z),$$

- i)* scrivere la matrice A_s associata ad f_s rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 ;
- ii)* determinare nucleo ed immagine di f_s al variare del parametro reale s ;
- iii)* determinare, al variare di $s \in \mathbb{R}$, un sottospazio V_s di \mathbb{R}^3 tale che $\ker f_s \oplus V_s = \mathbb{R}^3$;
- iv)* stabilire per quali valori del parametro reale s la matrice A_s è diagonalizzabile su \mathbb{R} ;
- v)* per ognuno dei valori trovati in *iv)* determinare una base \mathcal{B}_s di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori di A_s ;
- vi)* posto $s = 5$ si ortonormalizzi la base \mathcal{B}_5 . Si ottiene in questo modo una base ortonormale di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori della matrice A_5 ?
- vii)* Determinare la matrice associata ad f_s rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, -1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ nel codominio.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione tre si considerino i punti $A = (-2, 8, -2)$, $B = (2, 7, -1)$, $C = (-2, 5, -5)$.

- a)* Mostrare che i punti A, B, C non sono allineati e determinare il piano π che li contiene;
- b)* determinare, se possibile, un punto D tale che il quadrilatero di vertici A, B, C, D sia un quadrato;
- c)* scrivere le equazioni cartesiane della retta r ortogonale al piano π e passante per B ;
- d)* calcolare la distanza della retta r dalla retta s passante per $(1, 0, 0)$ e parallela al vettore $v = (0, 1, 1)$;
- e)* determinare il luogo dei punti equidistanti dai punti A, B, C . È una varietà lineare? Se sì, di quale dimensione?

Esercizio 4. Determinare tutti i sottospazi U di \mathbb{R}^3 tali che la proiezione ortogonale di $(0, 2, 2)$ su U sia $(1, 2, 1)$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

**CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA,
CHIMICA-MATERIALI**

Padova 21-03-06

I appello

TEMA n.4

Esercizio 1. Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 , ammette soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 13x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 - (k + k^2)x_3 + (4 - k^2 - 2k)x_4 = -4 - k^2 - 2k \\ -x_1 + 2k(1 + k)x_3 + (3k^2 + 6k - 1)x_4 = 2(k^2 + 3k - 2) \end{cases}$$

Risolvere il sistema per i valori di k per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 2. Data l'applicazione lineare $h_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$h_s(x, y, z) = (4x + (s - 2)y, 2x + sy, sx - sy + (s + 2)z),$$

- i) scrivere la matrice A_s associata ad h_s rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 ;
- ii) determinare nucleo ed immagine di h_s al variare del parametro reale s ;
- iii) determinare, al variare di $s \in \mathbb{R}$, un sottospazio T_s di \mathbb{R}^3 tale che $\ker h_s \oplus T_s = \mathbb{R}^3$;
- iv) stabilire per quali valori del parametro reale s la matrice A_s è diagonalizzabile su \mathbb{R} ;
- v) per ognuno dei valori trovati in iv) determinare una base \mathcal{B}_s di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori di A_s ;
- vi) posto $s = 2$ si ortonormalizzi la base \mathcal{B}_4 . Si ottiene in questo modo una base ortonormale di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori della matrice A_2 ?
- vii) Determinare la matrice associata ad h_s rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1, -1), (-1, 1, 0), (2, 0, 0)\}$ nel codominio.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione tre si considerino i punti $A = (0, 6, 6)$, $B = (3, 6, 3)$, $C = (1, 2, 7)$.

- a) Mostrare che i punti A, B, C non sono allineati e determinare il piano π che li contiene;
- b) determinare, se possibile, un punto D tale che il quadrilatero di vertici A, B, C, D sia un quadrato;
- c) scrivere le equazioni cartesiane della retta r ortogonale al piano π e passante per B ;
- d) calcolare la distanza della retta r dalla retta s passante per $(0, 1, 0)$ e parallela al vettore $v = (4, 5, -2)$;
- e) determinare il luogo dei punti equidistanti dai punti A, B, C . È una varietà lineare? Se sì, di quale dimensione?

Esercizio 4. Determinare tutti i sottospazi U di \mathbb{R}^3 tali che la proiezione ortogonale di $(2, 3, 0)$ su U sia $(1, 0, -1)$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.