I prova parziale Matematica 2, 10/02/06
Ingegneria Meccanica
Soluzione degli esercizi, Tema n.1

Esercizio 1
a) L'insieme T consiste delle matrici di $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ della forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_3 \\ x_4 & x_1 - x_3 & 2x_1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto T è l'insieme di tutte e sole le combinazioni lineari delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, come tale, è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$.

b) Le matrici B e C sono linearmente indipendenti poiché non sono una multiplo dell'altra e la matrice A non può essere una combinazione lineare delle matrici B e C dal momento che gli elementi di posto $1,1$ di B e C sono nulli e l'elemento di posto $1,1$ della matrice A è non nullo. Dunque le matrici A, B e C generano T e sono linearmente indipendenti, pertanto individuano una base di T. Di conseguenza: $\dim(T) = 3$.

c) L'insieme L è contenuto in T poiché i generatori di L soddisfano le equazioni di T. Si osservi che il terzo generatore di L è somma dei primi due e che questi sono linearmente indipendenti. Dunque $\dim(L) = 2$. Usando la formula di Grassmann otteniamo $\dim(S) = 1$. Si tratta dunque di completare la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ di L in una base di T. Si può scegliere, ad esempio:

$$S = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Esercizio 2 Consideriamo la matrice completa $(A|b)$ associata al sistema dato: $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a^2+2a+3 & a^2-2 & a+6 \\ 0 & 1 & 2(a^2+2a+1) & 3a^2-2a-7 & 3a+4 \end{array}\right)$ e riduciamola in forma a scalini:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a^2+2a+4 & a^2-2 & a+5 \\ 0 & 1 & 2(a^2+2a+1) & 3a^2-2a-7 & 3a+4 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2+2a & a^2-4 & a+1 \\ 0 & 0 & 2(a^2+2a) & 3a^2-2a-8 & 3a+2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2+2a & a^2-4 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2a & a \end{array}\right).$$

Se $a^2-2a \neq 0$ e $a^2+2a \neq 0$ cioè, per ogni $a \neq 0, 2, -2$, $rg(A) = rg(A|b) = 4$, dunque il sistema ammette una ed una sola soluzione;

se $a = 2$ oppure $a = -2$, $rg(A) = 3 \neq rg(A|b) = 4$, dunque il sistema non ha soluzioni;

infine, se $a = 0$, $rg(A) = rg(A|b) = 3$, dunque il sistema ha infinite soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 2z + t = 2 \\ -4t = 1 \end{cases}$$

Si ottiene l'insieme di soluzioni: $(-\frac{5}{8}, \frac{9}{4}, 0, -\frac{1}{4}) + \langle(\frac{3}{2}, -2, 1, 0)\rangle$.

Esercizio 3

a) Riducendo la matrice A in forma a scala si ottiene $rg(A) = 3$. Dunque l'immagine di g ha dimensione 3, vale a dire: $Im\ g = \mathbb{R}^3$. Per il teorema delle dimensioni, $\ker g = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

b) Dal momento che l'endomorfismo g è biunivoco, la controimmagine del vettore $(2, 1, 3)$ è costituita da un solo elemento che si trova risolvendo il sistema lineare associato alla matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right).$$

Riducendo a scala si ottiene l'unica soluzione: $(\frac{8}{11}, \frac{9}{11}, \frac{2}{11})$.

c) Si ha $g(L) = \langle (0,1,2), (2,-3,4) \rangle$. Per quanto trovato in *a*), basta scegliere $M = \langle (2,1,1) \rangle$.

d) I vettori $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ e $(1,0,1)$ sono linearmente indipendenti. Per ipotesi, $\dim(Im\ \psi) = 2$ e $\dim(\ker \psi) = 1$. Pertanto le condizioni assegnate sono compatibili con il teorema delle dimensioni e, di conseguenza, una applicazione lineare ψ come richiesta esiste.
Fissata la base $\{(0,1,0), (1,0,0), (1,0,1)\}$ nel dominio di ψ e la base canonica nel codominio, la matrice di ψ rispetto a queste basi è: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4

a) $\dim(V) = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$
$rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 15 \end{pmatrix} = 3$; inoltre $W = \langle (1,0,1,0,1), (0,1,-1,1,-1) \rangle$, dal momento che $(2,1,1,1,1) = 2(1,0,1,0,1) + (0,1,-1,1,-1)$. Dunque $\dim(W) = 2$.

b) Si ha:

$$\dim(V+W) = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} =$$
$$rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 4.$$

Abbiamo così ottenuto:

$$V + W = \langle (1,3,5,2,1), (0,1,-1,1,5), (0,0,-7,1,15), (0,0,0,0,1) \rangle.$$

Usando la formula di Grassmann si ha: $\dim(V \cap W) = 1$. Osserviamo che $(1,0,1,0,1) = (2,3,6,2,2) - (1,3,5,2,1)$, pertanto $V \cap W = \langle (1,0,1,0,1) \rangle$.

c) Si tratta di completare una base di V in una base di $V+W$. Usando la descrizione di $V+W$ ottenuta in b), si osserva immediatamente che si può scegliere, ad esempio, $S = \langle(0,0,0,0,1)\rangle$.

d) Il vettore $(1,4,4,3,6)$ è uno dei generatori di partenza del sottospazio V. Si ha: $m = (1,4,4,3,0) = (1,4,4,3,6) - 6(0,0,0,0,1)$. Dunque: $m_V = (1,4,4,3,6)$ e $m_S = (0,0,0,0,-6)$.

Esercizio 5 La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, è iniettiva ma non suriettiva. Naturalmente essa non soddisfa il teorema delle dimensioni non essendo una funzione lineare. (Un'applicazione lineare $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva è anche suriettiva).