CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, CHIMICA e MATERIALI

Padova 30-03-2007

II appello

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. L'insieme $(1,0,1) + \langle (2,0,2) \rangle$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
2. Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono simili.
3. Ogni matrice simmetrica è ortogonale.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1. Sia $L_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare che ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & t \\ 0 & 1 & 0 & -t \\ t & 1 & -t & 0 \end{pmatrix}$$

come matrice (rispetto alle basi canoniche).

1. Si dica per quali t, $\ker(L_t)$ ha dimensione 2 e $Im(L_t)$ contiene il vettore $(3,0,1)$.
2. Determinare $\ker(L_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
3. Sia $S = \langle (-1,1,1,0), (0,0,0,1) \rangle$. Determinare $S \cap \ker(L_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
4. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare iniettiva $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker(L_1) = Im(g)$. L'applicazione $L_1 \circ g$ è invertibile?

Esercizio 2. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ e $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Stabilire se le matrici A e H sono invertibili.
2. Stabilire se la matrice $H^{-1}AH$ è diagonale.
3. Si determini, se possibile, una matrice ortogonale K tale che $K^{-1}AK$ sia diagonale.

Esercizio 3. Si considerino i punti $A = (2,0,6)$, $B = (2,2,3)$, $C = (4,0,0)$.

1. Stabilire se i punti A, B e C sono allineati.
2. Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente i punti A, B e C.
3. Determinare il piano contenente i punti B e C, ortogonale al piano π.
4. Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e C.

Esercizio 4.

1. Siano $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\underline{x}$ un vettore colonna di $\mathbb{R}^n$ e $\underline{b}$ un vettore colonna di $\mathbb{R}^m$. Si consideri il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ di m equazioni in n incognite. Mostrare che se $rg(A) = rg(A|\underline{b})$ il sistema ha soluzioni. Esiste un sistema lineare di tre equazioni in quattro incognite il cui insieme di soluzioni sia $S = (1,2,1,0) + \langle (3,2,0,1), (1,0,1,0) \rangle$?
2. Sia H una matrice ortogonale e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di H. Mostrare che $|\lambda| = 1$. Esibire, se possibile, una matrice ortogonale $K \in M_2(\mathbb{R})$ non diagonalizzabile.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.