LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, CHIMICA e MATERIALI
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 19-03-07
II prova parziale
TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. L'equazione $x - y + z = 0$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ descrive una retta passante per l'origine.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.
3. Ogni matrice diagonalizzabile è invertibile.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k-1 & 0 \\ 2k-1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

1. Stabilire per quali valori di k, 0 è autovalore di A_k.
2. Per ogni k determinato nel punto precedente, stabilire se A_k è diagonalizzabile.
3. Determinare, quando possibile, una matrice ortogonale che diagonalizzi A_k.

Esercizio 2. Sia $U = \langle (1,2,0), (2,0,2) \rangle$.

1. Determinare $U^\perp$.
2. Indicata con $\varphi_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare
$$v \mapsto v_{||} \qquad \text{(proiezione ortogonale su } U\text{)},$$
determinare $\ker \varphi_U$.
3. Determinare i vettori $u \in \mathbb{R}^3$ tali che $\varphi_U(u) = u$.
4. L'applicazione φ_U è diagonalizzabile?
5. Determinare tutti i vettori u di $\mathbb{R}^3$ tali che $\varphi_U(u) = (0, 4, -2)$.

Esercizio 3. Siano assegnate le rette

$$r : \begin{cases} x = z - 1 \\ x = y + z - 1 \end{cases} \qquad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

1. Stabilire la posizione reciproca di r e s.
2. Determinare, se possibile, una retta parallela al piano $y = 0$ che incida l'asse delle y e le rette r e s.
3. Determinare un piano equidistante dalle rette r e s.

Esercizio 4.

1. Data $A \in M_n(\mathbb{R})$, mostrare che se A ha un autovalore di molteplicità algebrica e molteplicità geometrica uguali a $n-1$, allora A è diagonalizzabile. Esibire una matrice con un solo autovalore non diagonalizzabile.
2. Dimostrare che una matrice ortogonalmente diagonalizzabile è simmetrica. Esibire una matrice diagonalizzabile ma non ortogonalmente diagonalizzabile.

N.B. Ogni affermazione va opportunamente giustificata.