**LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, CHIMICA e MATERIALI**
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 19-03-07
I appello
TEMA n.1

## PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.
3. L'equazione $x-y+z=0$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ descrive una retta passante per l'origine.

## PARTE 2. Esercizi

**Esercizio 1.** Sia $U = \langle (2,1,1,1),(0,0,1,1) \rangle$ e sia $S_a$, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare nelle variabili $x$, $y$, $z$, $w$:

$$\begin{cases} 3x+2y-z-4w=0 \\ 2x+y-3w=0 \\ ay-2z+w=0. \end{cases}$$

1. Determinare $S_a$.
2. Stabilire per quali valori di $a$ il sottospazio $S_a$ è in somma diretta con $U$.
3. Stabilire per quali valori di $a$ esiste un unico endomorfismo $L$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $U$ sia l'autospazio di $L$ relativo all'autovalore 3 e $\ker L = S_a$. Fissate opportunamente una base nel dominio ed una base nel codominio di $L$, scrivere la matrice di $L$ rispetto a tali basi.
4. Determinare $U^\perp$.
5. Posto $a=0$, determinare, se possibile, un vettore $v \in S_a$ la cui proiezione ortogonale su $U$ sia $(2,1,0,0)$.

**Esercizio 2.** Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e sia $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da:

$$X \mapsto AX, \quad (X \in M_2(\mathbb{R})).$$

1. Verificare che $L$ è lineare. Scrivere la matrice associata a $L$ rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.
2. Determinare $\ker L$ e $ImL$.
3. Sia $V_a = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = aX\}$, con $a \in \mathbb{R}$. Mostrare che $V_a$ è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.
4. Per quali valori di $a$ si ha $V_a \neq 0$?
5. Stabilire se l'applicazione $L$ è diagonalizzabile. Essa è ortogonalmente diagonalizzabile?

**Esercizio 3.** Assegnate le rette

$$r : \begin{cases} x = z-1 \\ x = y+z-1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha, \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

1. Stabilire la posizione reciproca di $r$ e $s$.

2. Determinare le rette parallele al piano $y = 0$ che incidono l'asse delle $y$ e le rette $r$ e $s$.
3. Determinare un piano equidistante dalle rette $r$ e $s$.

**Esercizio 4.**

1. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Mostrare che se $\ker f = \{0_V\}$, allora $f$ è iniettiva. Costruire una applicazione lineare iniettiva $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. $f$ è anche suriettiva?
2. Data $A \in M_n(\mathbb{R})$, mostrare che se $A$ ha un autovalore di molteplicità algebrica e molteplicità geometrica uguali a $n - 1$, allora $A$ è diagonalizzabile. Esibire una matrice con un solo autovalore non diagonalizzabile.

**N.B. Ogni affermazione va opportunamente giustificata.**