

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, CHIMICA E DEI MATERIALI

Corso di Matematica 2

Padova 18-09-2007

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. $\langle(0, 0, 0), (1, 1, 0)\rangle$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 di dimensione due.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.
3. Nello spazio euclideo tridimensionale due rette ortogonali sono complanari.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Sia $\mathcal{S} \subset M(3 \times 3, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche. Si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{A \in \mathcal{S} \mid (1, 0, 0) \text{ è autovettore di } A\}; \quad W = \{B \in \mathcal{S} \mid (0, 0, 1) \text{ è autovettore di } B\}.$$

- a) Dimostrare che U e W sono sottospazi di \mathcal{S} e scriverne una base.
- b) Determinare $U \cap W$.
- c) Determinare $U + W$. Tale somma è diretta?
- d) Determinare, se esiste, un sottospazio $T \subset \mathcal{S}$ tale che $U \oplus T = W \oplus T = U + W$.

Esercizio 2 Si consideri l'endomorfismo $L(x, y, z) = (3x + y + z, x + 3y + z, x + y + 3z)$ di \mathbb{R}^3 .

- a) Determinare nucleo ed immagine di L .
- b) Calcolare $L^{-1}(1, 1, 1)$.
- c) Stabilire se 2 è autovalore di L .
- d) Scrivere, se esiste, una base ortonormale di autovettori di L .

- e) Determinare, se esiste, una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale L ha matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Una tale base \mathcal{B} può essere ortonormale?

Esercizio 3 In \mathbb{A}^3 , sia r la retta passante per $P(1, 2, 1)$ e $Q(3, 0, 1)$.

- a) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, stabilire la posizione reciproca di r con la retta $s_a : \begin{cases} x + ay - z = 4 \\ x + y + z = a^2 + 3 \end{cases}$.
- b) Per $a = 0$, calcolare la distanza tra r ed s_0 .
- c) Sapendo che i punti P, Q sono vertici opposti di un rombo che ha area $2\sqrt{2}$, determinare gli altri due vertici nel piano $x + y = 3$.

(continua)

Esercizio 4 Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata ad A rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^2 . Supponiamo che f abbia un solo autovalore che indicheremo con α . Si dimostri che:

(i) A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

oppure

(ii) A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate