

Parte 1

1. Falso: un sistema lineare a coefficienti reali non può avere due soluzioni.
2. Vero: \mathbb{R}^2 ha dimensione due, quindi tre vettori di \mathbb{R}^2 sono sempre linearmente dipendenti.
3. Falso: controesempio: $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$.

Parte 2

Esercizio 1.

(Parte a) Scriviamo la matrice completa associata al sistema lineare Σ_t e applichiamo il metodo di riduzione di Gauss.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+t & -1-t \\ 2 & t & t & -t \\ -1 & 1 & 1 & 1+t \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+t & -1-t \\ 0 & t & -2-t & 2+t \\ 0 & 1 & 2+t & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+t & -1-t \\ 0 & 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & -2-t & 2+t \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+t & -1-t \\ 0 & 1 & 2+t & 0 \\ 0 & 0 & -(2+t)(1+t) & 2+t \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ci sono tre casi distinti:

- (1) Se $-(2+t)(1+t) \neq 0$, cioè t diverso da -1 e -2 , il rango della matrice incompleta è 3, quindi uguale a quello della matrice completa e il sistema ha una sola soluzione.
 - (2) Se $t = -1$, il rango della matrice incompleta è 2 ma il rango della matrice completa è 3, quindi il sistema non ha soluzioni.
 - (3) Se $t = -2$, il rango della matrice incompleta è 2 uguale al rango della matrice completa, quindi il sistema ha infinite soluzioni della forma $v + W$ dove W è un sottospazio vettoriale di dimensione $3 - 2 = 1$.
- (1) Se t è diverso da -1 e -2 ,

$$\Sigma_t \iff \begin{cases} x + (1+t)z = -1-t \\ y + (2+t)z = 0 \\ -(2+t)(1+t)z = 2+t \end{cases}$$

e $S_t = \{(-t, (2+t)/(1+t), -1/(1+t))\}$.

- (2) Se $t = -1$, $S_{-1} = \emptyset$.
- (3) Se $t = -2$, una soluzione particolare di

$$\Sigma_{-2} \iff \begin{cases} x = 1+z \\ y = 0 \end{cases}$$

è, ponendo $z = 0$, $(x, y, z) = (1, 0, 0)$. Il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

è generato da $(1, 0, 1)$, il vettore che si ottiene ponendo $z = 1$. Pertanto,

$$S_{-2} = (1, 0, 0) + \langle (1, 0, 1) \rangle.$$

(Parte b) L'insieme V contiene infiniti elementi quindi non può essere uguale a S_t se $t \neq -2$. Se $t = -2$, vale $S_{-2} = V$, infatti i corrispondenti sottospazi vettoriali $\langle (1, 0, 1) \rangle$ e $\langle (2, 0, 2) \rangle$ sono uguali, inoltre $(-2, 0, -3)$ è uguale a $(1, 0, 0) - 3(1, 0, 1)$ quindi appartiene a S_{-2} .

Esercizio 2.

(1) Scriviamo le coordinate delle matrici di $M_2(\mathbb{R})$ rispetto alla base canonica \mathcal{E} di $M_2(\mathbb{R})$. Otteniamo: $A = (0, 0, 1, 1)_{\mathcal{E}}$, $B = (2, -1, -1, 3)_{\mathcal{E}}$, $C = (-4, 2, 4, -4)_{\mathcal{E}}$, $A' = (1, 1, 0, 0)_{\mathcal{E}}$, $B' = (-2, 1, 2, -2)_{\mathcal{E}}$, $C' = (6, 0, -4, 4)_{\mathcal{E}}$. Per calcolare la dimensione di S mettiamo le coordinate di A , B e C nelle righe di una matrice di cui calcoliamo il rango utilizzando il metodo di riduzione di Gauss. Facciamo lo stesso per T con le matrici A' , B' e C' .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\dim(S) = 2$, $\dim(T) = 2$.

(2) Dalle riduzioni in forma a scalini del punto (1) abbiamo che $S = \langle (2, -1, -1, 3)_{\mathcal{E}}, (0, 0, 1, 1)_{\mathcal{E}} \rangle$ e $T = \langle (1, 1, 0, 0)_{\mathcal{E}}, (0, 3, 2, -2)_{\mathcal{E}} \rangle$. Un insieme di generatori di $S + T$ è dato dall'unione degli insiemi di generatori di S e di T , da cui possiamo estrarre una base:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi una base di $S + T$ è data da $\{(2, -1, -1, 3)_{\mathcal{E}}, (0, 3, 1, -3)_{\mathcal{E}}, (0, 0, 1, 1)_{\mathcal{E}}\}$. Per la formula di Grassmann, $S \cap T$ ha dimensione $2 + 2 - 3 = 1$. Osserviamo che la matrice $B' \in T$ appartiene anche al sottospazio S , infatti $B' = A - B \in S$. Dunque $S \cap T = \langle B' \rangle$.

(3) Sia $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ un endomorfismo come richiesto. Allora $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ e, per il teorema delle dimensioni, $\dim(\ker(\varphi)) = 1$. Inoltre $\ker(\varphi) \subset T$. La matrice $A' \in T$ non appartiene ad S ed è pertanto linearmente indipendente dalle matrici A e B . Possiamo dunque scegliere A' come generatore di $\ker(\varphi)$, cioè definire $\varphi(A') = 0$. Abbiamo così definito φ sull'insieme di matrici linearmente indipendenti $\{A, B, A'\}$. Resta da completare tale insieme in una base \mathcal{B} di $M_2(\mathbb{R})$ e definire φ sul quarto elemento della base. Scegliamo $\mathcal{B} = \{A, B, A', C\}$ con $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si verifica facilmente che \mathcal{B} è una base di $M_2(\mathbb{R})$. Definiamo $\varphi(C) = C$. In tal modo $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 3$, come richiesto.

La matrice associata a φ rispetto alla base \mathcal{B} è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.

(1) La matrice di f_k rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^4 è

$$\begin{pmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}.$$

(2) Il suo determinante è $(1+k)^3(1-k)$. Quindi, se il determinante è diverso da zero cioè k è diverso da 1 e -1 , f_k è biunivoca, $\text{Ker } f_k = 0_{\mathbb{R}^4}$, $\text{Im } f_k = \mathbb{R}^4$ (una qualsiasi base di \mathbb{R}^4 va bene) e ovviamente vale $0_{\mathbb{R}^4} \oplus \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4$.

Se $k = -1$, il rango della matrice è 1, $\text{Im } f_{-1} = \langle (0, 1, -1, 0) \rangle$, $\text{ker } f_{-1} = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$. Inoltre $f_{-1}(0, 1, -1, 0) \neq 0$ quindi il vettore $(0, 1, -1, 0)$ non appartiene al nucleo di f_{-1} . Si ha dunque: $\text{Ker } f_{-1} \cap \text{Im } f_{-1} = 0_{\mathbb{R}^4}$ e $\text{Ker } f_{-1} \oplus \text{Im } f_{-1} = \mathbb{R}^4$.

Se $k = 1$, il rango della matrice è 3, $\text{Im } f_1 = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$; $\text{ker } f_1 = \langle (0, 1, -1, 0) \rangle$. Come sopra, $\text{Ker } f_1 \cap \text{Im } f_1 = 0_{\mathbb{R}^4}$ e $\text{Ker } f_1 \oplus \text{Im } f_1 = \mathbb{R}^4$.

(3) Se una delle due applicazioni fosse invertibile, l'altra dovrebbe essere uguale a zero, ma non esiste un valore di k tale $f_k = 0$. Quindi è sufficiente cercare k_1, k_2 in $\{1, -1\}$. Poiché $f_{k_1} \circ f_{k_2} = 0$ equivale a $\text{Im } f_{k_2} \subseteq \text{Ker } f_{k_1}$ abbiamo esattamente due possibilità: $(k_1, k_2) = (1, -1)$ oppure $(k_1, k_2) = (-1, 1)$.

Esercizio 4.

(1) Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0_W$, allora poiché f è lineare $0_W = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$, cioè $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \text{ker } f$. Dal momento che f è iniettiva, $\text{ker } f = \{0_V\}$, dunque $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$, inoltre v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti quindi $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

(2) Abbiamo $\text{Im } f = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$, dunque, se i vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, allora sono una base di $\text{Im } f$ e si ha $\dim(\text{Im } f) = n = \dim(V)$. Per il teorema delle dimensioni si ha dunque $\dim(\text{ker } f) = 0$, cioè f è iniettiva.