LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA
Corso di Matematica 2
I^a prova parziale – Padova 15-02-08
Docenti: Cantarini – Fiorot
TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Sia $L : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare con $\dim(V) = n$ e sia S un sottospazio vettoriale di V. Allora $\dim(S) = \dim(L(S))$.

2. Sia $L : \mathbb{R}^{\leq 5}[x] \longrightarrow M_{3,2}(\mathbb{R})$ un'applicazione lineare dallo spazio dei polinomi in x di grado minore o uguale a 5 allo spazio delle matrici 3 per 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Se L è iniettiva allora è anche suriettiva.

3. La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
ha rango 3.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + tx_4 = 1 \\ -tx_1 + t(t^2-1)x_2 - t^2x_4 + tx_5 = t^2 \\ t(t^2-1)x_2 + (3t+1)x_3 + x_4 + tx_5 = t^2 + 2t + 1 \\ x_1 + 2x_3 + t^2x_4 = t + 1 \end{cases}$$

Si dica per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ tale sistema ammette soluzioni e per tali valori del parametro determinare il rango della matrice incompleta A associata al sistema e la dimensione del nucleo di A.
Risolvere il sistema per uno dei valori di t per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 2 Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (1,2,-1,2), (2,3,-2,1), (2,5,-2,7) \rangle,$$

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x_1 - 3x_2 + x_4 = 0, 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

(a) Determinare una base di $S \cap T$ ed una base di $S + T$.

(b) Stabilire se la somma di S e T è diretta.

(c) Determinare, se possibile, un sistema lineare di tre equazioni che abbia S come insieme di soluzioni.

(d) Determinare, se possibile, un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ tale che $S + W = \mathbb{R}^4$ ma la somma di S e W non sia diretta.

(e) Determinare, se possibile, due sottospazi V_1 e V_2 di $\mathbb{R}^4$ tali che $V_1 \oplus V_2 = S + T$. I sottospazi V_1 e V_2 sono univocamente determinati?

(*continua*)

Esercizio 3

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da: $f(X) = AX$.

(a) Determinare la matrice F associata ad f rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Determinare nucleo e immagine di f.

(c) Sia $\mathcal{B}_k = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix} \right\}$. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{B}_k$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$.

(d) Per i valori di k trovati in (c), determinare la matrice F_k associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}_k$. Le matrici F_1 e F_2 sono simili?

(e) Costruire, se possibile, una funzione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f$ sia suriettiva ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ tale che $f \circ h$ sia iniettiva.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA
Corso di Matematica 2
I^a prova parziale – Padova 15-02-08
Docenti: Cantarini – Fiorot
TEMA n.2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Non esistono applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^{\leq 4}[x]$ iniettive.
2. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$. Allora la matrice associata a L rispetto alla base canonica ha rango 3.
3. Sia $L : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare suriettiva con $\dim(V) = n$ e sia S un sottospazio di V. Allora $\dim(S) = \dim(L(S))$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + (k-1)x_4 = 1 \\ (1-k)x_1 + k(k^2-3k+2)x_2 - (k-1)^2 x_4 + (k-1)x_5 = k^2 - 2k + 1 \\ k(k^2-3k+2)x_2 + (3k-2)x_3 + x_4 + (k-1)x_5 = k^2 \\ x_1 + 2x_3 + (k^2-2k+1)x_4 = k \end{cases}$$

Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ tale sistema ammette soluzioni e per tali valori del parametro determinare il rango della matrice incompleta A associata al sistema e la dimensione del nucleo di A.

Risolvere il sistema per uno dei valori di k per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 2 Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$L = \langle (2,-1,2,1), (1,-2,3,2), (7,-2,5,2) \rangle,$$

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 0, x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0\}.$$

(a) Determinare una base di $L \cap M$ ed una base di $L + M$.

(b) Stabilire se la somma di L e M è diretta.

(c) Determinare, se possibile, un sistema lineare di tre equazioni che abbia L come insieme di soluzioni.

(d) Determinare, se possibile, un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ tale che $M + W = \mathbb{R}^4$ ma la somma di M e W non sia diretta.

(e) Determinare, se possibile, due sottospazi V_1 e V_2 di $\mathbb{R}^4$ tali che $V_1 \oplus V_2 = L + M$. I sottospazi V_1 e V_2 sono univocamente determinati?

(*continua*)

Esercizio 3

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e sia $\psi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da: $\psi(X) = XA$.

(a) Determinare la matrice G associata a ψ rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Determinare nucleo e immagine di ψ.

(c) Sia $\mathcal{B}_a = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}$. Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{B}_a$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$.

(d) Per i valori di a trovati in (c), determinare la matrice G_a associata a ψ rispetto alla base $\mathcal{B}_a$. Le matrici G_{-1} e G_3 sono simili?

(e) Costruire, se possibile, una funzione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ \psi$ sia suriettiva ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ tale che $\psi \circ h$ sia iniettiva.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Corso di Matematica 2

I^a prova parziale – Padova 15-02-08

Docenti: Cantarini – Fiorot

TEMA n.3

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Sia $L : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare e siano v_1, v_2 vettori di V linearmente indipendenti. Allora $L(v_1)$ è diverso da $L(v_2)$.
2. Il sottospazio $\langle (1,2,0), (1,1,1), (2,4,0), (0,0,0) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ è tutto $\mathbb{R}^3$.
3. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare. Allora L è iniettiva.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si consideri il seguente sistema lineare, nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} -hx_1 + h(h^2-1)x_2 + hx_4 - h^2 x_5 = h^2 \\ x_1 + 2x_3 + hx_5 = 1 \\ x_1 + 2x_3 + h^2 x_5 = h + 1 \\ h(h^2-1)x_2 + (3h+1)x_3 + hx_4 + x_5 = h^2 + 2h + 1 \end{cases}$$

Si dica per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ tale sistema ammette soluzioni e per tali valori del parametro determinare il rango della matrice incompleta A associata al sistema e la dimensione del nucleo di A.

Risolvere il sistema per uno dei valori di h per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 2 Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$A = \langle (1,-1,2,2), (2,-2,3,1), (2,-2,5,7) \rangle,$$

$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x_1 - 3x_3 + x_4 = 0, 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\}.$$

(a) Determinare una base di $A \cap B$ ed una base di $A + B$.

(b) Stabilire se la somma di A e B è diretta.

(c) Determinare, se possibile, un sistema lineare di tre equazioni che abbia A come insieme di soluzioni.

(d) Determinare, se possibile, un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ tale che $A + W = \mathbb{R}^4$ ma la somma di A e W non sia diretta.

(e) Determinare, se possibile, due sottospazi V_1 e V_2 di $\mathbb{R}^4$ tali che $V_1 \oplus V_2 = A + B$. I sottospazi V_1 e V_2 sono univocamente determinati?

(*continua*)

Esercizio 3

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e sia $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da: $\varphi(X) = XA$.

(a) Determinare la matrice F associata a φ rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Determinare nucleo e immagine di φ.

(c) Sia $\mathcal{B}_h = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -h \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -h & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -h \end{pmatrix} \right\}$. Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{B}_h$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$.

(d) Per i valori di h trovati in (c), determinare la matrice F_h associata a φ rispetto alla base $\mathcal{B}_h$. Le matrici F_{-1} e F_1 sono simili?

(e) Costruire, se possibile, una funzione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ \varphi$ sia suriettiva ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ tale che $\varphi \circ h$ sia iniettiva.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Corso di Matematica 2

I^a prova parziale – Padova 15-02-08

Docenti: Cantarini – Fiorot

TEMA n.4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Sia $L : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare e siano $\{v_1, v_2, v_3\}$ vettori di V linearmente indipendenti. Allora $L(v_1), L(v_2), L(v_3)$ sono linearmente indipendenti.
2. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ un isomorfismo. Allora la matrice associata a L rispetto ad una base $\mathcal{B}$ del dominio e ad una base $\mathcal{B}'$ del codominio ha rango 3.
3. Le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
hanno lo stesso rango.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si consideri il seguente sistema lineare, nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + (s-1)x_5 = 1 \\ (1-s)x_1 + s(s^2-3s+2)x_2 + (s-1)x_4 - (s-1)^2 x_5 = s^2 - 2s + 1 \\ s(s^2-3s+2)x_2 + (3s-2)x_3 + (s-1)x_4 + x_5 = s^2 \\ x_1 + 2x_3 + (s^2-2s+1)x_5 = s \end{cases}$$

Si dica per quali valori di $s \in \mathbb{R}$ tale sistema ammette soluzioni e per tali valori del parametro determinare il rango della matrice incompleta A associata al sistema e la dimensione del nucleo di A.

Risolvere il sistema per uno dei valori di s per i quali la soluzione non è unica.

Esercizio 2 Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$C = \langle(-2, 1, -2, 1), (1, -1, -1, 3), (5, -2, 7, -6)\rangle,$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, 4x_1 + 7x_2 + x_4 = 0\}.$$

(a) Determinare una base di $C \cap D$ ed una base di $C + D$.

(b) Stabilire se la somma di C e D è diretta.

(c) Determinare, se possibile, un sistema lineare di tre equazioni che abbia C come insieme di soluzioni.

(d) Determinare, se possibile, un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ tale che $D + W = \mathbb{R}^4$ ma la somma di D e W non sia diretta.

(e) Determinare, se possibile, due sottospazi V_1 e V_2 di $\mathbb{R}^4$ tali che $V_1 \oplus V_2 = C + D$. I sottospazi V_1 e V_2 sono univocamente determinati?

(*continua*)

Esercizio 3

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ e sia $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da: $\varphi(X) = AX$.

(a) Determinare la matrice F associata a φ rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Determinare nucleo e immagine di φ.

(c) Sia $\mathcal{B}_b = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \right\}$. Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{B}_b$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$.

(d) Per i valori di b trovati in (c), determinare la matrice F_b associata a φ rispetto alla base $\mathcal{B}_b$. Le matrici F_2 e F_3 sono simili?

(e) Costruire, se possibile, una funzione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ \varphi$ sia suriettiva ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ tale che $\varphi \circ h$ sia iniettiva.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate