CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 08-09-08

I Appello sessione autunnale

TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) Due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 hanno sempre intersezione non banale.

2) Ogni matrice diagonalizzabile in $M_3(\mathbb{R})$ ha tre autovalori distinti.

3) I piani $\pi : (0,0,1) + \langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle$ e $\sigma : (1,0,1) + \langle (1,1,0),(0,1,0)\rangle$ coincidono.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & (x,y,z,t) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y & x-y \\ 2x-2y & 2x-2y \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Stabilire se f è un isomorfismo.

2) Calcolare l'antiimmagine mediante f della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tale che $g \circ f = id_{\mathbb{R}^4}$.

4) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare non nulla $h : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tale che $h \circ f = 0$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x-y+z=0,\ x+2z=0\}$.

i) Determinare tutti gli elementi di $S = \langle (2,-1,0),(1,-1,-1)\rangle$ che abbiano proiezione ortogonale nulla su V.

ii) Determinare tutti gli elementi di $S+V$ che abbiano proiezione ortogonale su S uguale a $(3,-2,-1)$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire se A e B sono simili.

b) Determinare, se possibile, una matrice H tale che $H^{-1}AH = B$. H può essere ortogonale?

c) Stabilire se esiste un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $Av = \lambda v$ e $Bv = \sigma v$ per qualche $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$.

(*continua*)

Esercizio 4. Sia $r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$

i) Determinare equazioni cartesiane di una retta s passante per $P = (1, 1, 1)$ e parallela a r. Una siffatta retta è unica?

ii) Determinare un'equazione cartesiana di un piano π passante per $P = (1, 1, 1)$ parallelo alla retta r. Un siffatto piano è unico?

iii) Determinare un piano σ passante per $P = (1, 1, 1)$, parallelo a r e avente distanza nulla da r. Un siffatto piano è unico?

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 08-09-08

I Appello sessione autunnale

TEMA n.2

Parte 1. Quesiti preliminari.
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) Due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 hanno sempre intersezione non banale.

2) Ogni matrice diagonalizzabile in $M_3(\mathbb{R})$ ha almeno due autovalori distinti.

3) I piani $\pi : (0,0,1) + \langle (0,0,1), (0,1,0) \rangle$ e $\sigma : (0,1,2) + \langle (0,1,0), (0,1,2) \rangle$ coincidono.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & (x,y,z,t) & \longmapsto & \begin{pmatrix} z-t & z-t \\ 3z-3t & 3z-3t \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Stabilire se f è un isomorfismo.

2) Calcolare l'antiimmagine mediante f della matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.

3) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tale che $g \circ f = id_{\mathbb{R}^4}$.

4) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare non nulla $h : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tale che $h \circ f = 0$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y-z=0,\ x+2y=0\}$.

i) Determinare tutti gli elementi di $S = \langle (2,0,-1), (1,-1,-1) \rangle$ che abbiano proiezione ortogonale nulla su V.

ii) Determinare tutti gli elementi di $S+V$ che abbiano proiezione ortogonale su S uguale a $(3,-1,-2)$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire se A e B sono simili.

b) Determinare, se possibile, una matrice H tale che $H^{-1}AH = B$. H può essere ortogonale?

c) Stabilire se esiste un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $Av = \lambda v$ e $Bv = \sigma v$ per qualche $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$.

(*continua*)

Esercizio 4. Sia $r : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$

i) Determinare equazioni cartesiane di una retta s passante per $P = (1, 1, 1)$ e parallela a r. Una siffatta retta è unica?

ii) Determinare un'equazione cartesiana di un piano π passante per $P = (1, 1, 1)$ parallelo alla retta r. Un siffatto piano è unico?

iii) Determinare un piano σ passante per $P = (1, 1, 1)$, parallelo a r e avente distanza nulla da r. Un siffatto piano è unico?

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 08-09-08

I Appello sessione autunnale

TEMA n.3

Parte 1. Quesiti preliminari.
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) Due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 hanno sempre intersezione non banale.

2) Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ non è diagonalizzabile allora A ha almeno due autovalori uguali.

3) I piani $\pi : (2,0,1) + \langle (1,1,0), (0,1,0) \rangle$ e $\sigma : (1,0,1) + \langle (1,2,0), (0,1,0) \rangle$ coincidono.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & (x,y,z,t) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2(x-t) & 2(x-t) \\ -x+t & -x+t \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Stabilire se φ è un isomorfismo.

2) Calcolare l'antiimmagine mediante φ della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tale che $g \circ \varphi = id_{\mathbb{R}^4}$.

4) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare non nulla $h : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tale che $h \circ \varphi = 0$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0,\ 2x + z = 0\}$.

i) Determinare tutti gli elementi di $S = \langle (0,-1,2), (-1,-1,1) \rangle$ che abbiano proiezione ortogonale nulla su V.

ii) Determinare tutti gli elementi di $S + V$ che abbiano proiezione ortogonale su S uguale a $(-1,-2,3)$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire se A e B sono simili.

b) Determinare, se possibile, una matrice H tale che $H^{-1}AH = B$. H può essere ortogonale?

c) Stabilire se esiste un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $Av = \lambda v$ e $Bv = \sigma v$ per qualche $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$.

(*continua*)

Esercizio 4. Sia $r : \begin{cases} -x+y+z=1 \\ -2x+y+z=-2 \end{cases}$

i) Determinare equazioni cartesiane di una retta s passante per $P=(1,1,1)$ e parallela a r. Una siffatta retta è unica?

ii) Determinare un'equazione cartesiana di un piano π passante per $P=(1,1,1)$ parallelo alla retta r. Un siffatto piano è unico?

iii) Determinare un piano σ passante per $P=(1,1,1)$, parallelo a r e avente distanza nulla da r. Un siffatto piano è unico?

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 08-09-08

I Appello sessione autunnale

TEMA n.4

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) Due sottospazi di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 3 hanno sempre intersezione non banale.

2) Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ non è diagonalizzabile allora A ha almeno un autovalore nullo.

3) I piani $\pi : (2,0,1) + \langle (1,1,1), (0,1,1) \rangle$ e $\sigma : (1,0,0) + \langle (1,2,2), (0,1,1) \rangle$ coincidono.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} \psi : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & (x,y,z,t) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3(x-z) & 3(x-z) \\ -x+z & -x+z \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Stabilire se ψ è un isomorfismo.

2) Calcolare l'antiimmagine mediante ψ della matrice $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tale che $g \circ \psi = id_{\mathbb{R}^4}$.

4) Costruire, se possibile, un'applicazione lineare non nulla $h : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tale che $h \circ \psi = 0$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -x+y+z=0,\ 2x+z=0\}$.

i) Determinare tutti gli elementi di $S = \langle (-1,0,2), (-1,-1,1) \rangle$ che abbiano proiezione ortogonale nulla su W.

ii) Determinare tutti gli elementi di $S + W$ che abbiano proiezione ortogonale su S uguale a $(-2,-1,3)$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire se A e B sono simili.

b) Determinare, se possibile, una matrice H tale che $H^{-1}AH = B$. H può essere ortogonale?

c) Stabilire se esiste un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $Av = \lambda v$ e $Bv = \sigma v$ per qualche $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$.

(*continua*)

Esercizio 4. Sia $r : \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 3x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$

i) Determinare equazioni cartesiane di una retta s passante per $P = (1, 1, 1)$ e parallela a r. Una siffatta retta è unica?

ii) Determinare un'equazione cartesiana di un piano π passante per $P = (1, 1, 1)$ parallelo alla retta r. Un siffatto piano è unico?

iii) Determinare un piano σ passante per $P = (1, 1, 1)$, parallelo a r e avente distanza nulla da r. Un siffatto piano è unico?

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.