

**LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA**  
Corso di Matematica 2  
**Correzione prima prova parziale del 15-02-08**  
TEMA n.1

**PARTE 1. Quesiti preliminari**

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Sia  $L : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare con  $\dim(V) = n$  e sia  $S$  un sottospazio vettoriale di  $V$ . Allora  $\dim(S) = \dim(L(S))$ .
2. Sia  $L : \mathbb{R}^{\leq 5}[x] \rightarrow M_{3,2}(\mathbb{R})$  un'applicazione lineare dallo spazio dei polinomi in  $x$  di grado minore o uguale a 5 allo spazio delle matrici 3 per 2 a coefficienti in  $\mathbb{R}$ . Se  $L$  è iniettiva allora è anche suriettiva.
3. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 3.

**Soluzioni**

1. FALSA. Controesempio: sia  $n > 0$  e sia  $L : V \rightarrow W$  l'applicazione identicamente nulla. Ogni sottospazio non banale  $S$  di  $V$  ha come immagine lo spazio banale, pertanto  $\dim(S) > 0$  e  $\dim(L(S)) = 0$ .
2. VERA per il Teorema delle dimensioni, essendo  $\dim \mathbb{R}^{\leq 5}[x] = \dim M_{3,2}(\mathbb{R}) = 6$ .
3. FALSA: la terza riga di  $A$  è un multiplo della prima. Si ha  $rg(A) = 2$ .

**PARTE 2. Esercizi**

**Esercizio 1** Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + tx_4 = 1 \\ -tx_1 + t(t^2 - 1)x_2 - t^2x_4 + tx_5 = t^2 \\ t(t^2 - 1)x_2 + (3t + 1)x_3 + x_4 + tx_5 = t^2 + 2t + 1 \\ x_1 + 2x_3 + t^2x_4 = t + 1 \end{cases}$$

Si dica per quali valori di  $t \in \mathbb{R}$  tale sistema ammette soluzioni e per tali valori del parametro determinare il rango della matrice incompleta  $A$  associata al sistema e la dimensione del nucleo di  $A$ . Risolvere il sistema per uno dei valori di  $t$  per i quali la soluzione non è unica.

**Svolgimento.** La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & t & 0 & 1 \\ -t & t(t^2 - 1) & 0 & -t^2 & t & t^2 \\ 0 & t(t^2 - 1) & 3t + 1 & 1 & t & t^2 + 2t + 1 \\ 1 & 0 & 2 & t^2 & 0 & t + 1 \end{array} \right).$$

Riduciamo la matrice  $(A|b)$  in forma a scala per righe:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & t & 0 & 1 \\ 0 & t(t^2-1) & 2t & 0 & t & t^2+t \\ 0 & t(t^2-1) & 3t+1 & 1 & t & t^2+2t+1 \\ 0 & 0 & 0 & t^2-t & 0 & t \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & t & 0 & 1 \\ 0 & t(t^2-1) & 2t & 0 & t & t^2+t \\ 0 & 0 & t+1 & 1 & 0 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & t^2-t & 0 & t \end{array} \right).$$

Per  $t \neq 0, 1, -1$  si ha, dunque,  $rg(A) = rg(A|b) = 4$ . Per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema ha pertanto infinite soluzioni della forma  $v + \ker(A)$ , con  $\dim \ker(A) = 1$  (il numero delle variabili è 5!).

Se  $t = 0$  la matrice ridotta è:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

In questo caso  $rg(A) = rg(A|b) = 2$ . Il sistema ha pertanto infinite soluzioni della forma  $v + \ker(A)$  con  $\dim \ker(A) = 3$ . Determiniamo le soluzioni del sistema per  $t = 0$ . Una soluzione particolare è  $v = (-1, 0, 1, 0, 0)$ . Una base di  $\ker(A)$  è:  $\{(2, 0, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ . L'insieme  $S$  delle soluzioni del sistema (per  $t = 0$ ) è, dunque,  $S = (-1, 0, 1, 0, 0) + \langle (2, 0, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle$ .

Se  $t = 1$  la matrice ridotta è:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Si ha dunque  $rg(A) = 3 < rg(A|b) = 4$ . Per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema non ammette soluzioni.

Se  $t = -1$  la matrice ridotta è:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Si ha dunque  $rg(A) = 3 < rg(A|b) = 4$ . Per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema non ammette soluzioni.

In conclusione, il sistema ammette soluzioni per ogni  $t \neq \pm 1$ .

**Esercizio 2** Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^4$ :

$$S = \langle (1, 2, -1, 2), (2, 3, -2, 1), (2, 5, -2, 7) \rangle,$$

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x_1 - 3x_2 + x_4 = 0, 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

- Determinare una base di  $S \cap T$  ed una base di  $S + T$ .
- Stabilire se la somma di  $S$  e  $T$  è diretta.
- Determinare, se possibile, un sistema lineare di tre equazioni che abbia  $S$  come insieme di soluzioni.
- Determinare, se possibile, un sottospazio vettoriale  $W$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che  $S + W = \mathbb{R}^4$  ma la somma di  $S$  e  $W$  non sia diretta.
- Determinare, se possibile, due sottospazi  $V_1$  e  $V_2$  di  $\mathbb{R}^4$  tali che  $V_1 \oplus V_2 = S + T$ . I sottospazi  $V_1$  e  $V_2$  sono univocamente determinati?

**Svolgimento.** (a) Per prima cosa stabiliamo la dimensione di  $S$  e  $T$ :

$$\dim(S) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2,$$

da cui deduciamo anche che  $\{(1, 2, -1, 2), (0, 1, 0, 3)\}$  è una base di  $S$ . Si ha inoltre:

$$T = \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} = \{(-x_3, x_2, x_3, 4x_3 + 3x_2) \in \mathbb{R}^4\} =$$

$= \langle (-1, 0, 1, 4), (0, 1, 0, 3) \rangle$ , pertanto  $\dim(T) = 2$ . Si nota immediatamente che  $(0, 1, 0, 3) \in S \cap T$ . Inoltre si ha  $(-1, 0, 1, 4) = 2(0, 1, 0, 3) - (1, 2, -1, 2)$ , vale a dire  $T \subset S$ . Dal momento che  $\dim(S) = \dim(T) = 2$ , deduciamo che  $S = T$ . Di conseguenza  $S + T = S$ ,  $S \cap T = S$ .

(b) Dal momento che  $S = T$ , la somma di  $S$  e  $T$  non è diretta.

(c) Dal momento che  $S = T$ , la descrizione di  $T$  fornisce un sistema di equazioni il cui insieme di soluzioni è proprio  $S$ . Per ottenere un sistema lineare di tre equazioni basterà aggiungere alle equazioni di  $T$  una loro qualsiasi combinazione lineare:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(d) Rispondendo alla domanda (a) abbiamo individuato la base  $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1, 2), (0, 1, 0, 3)\}$  di  $S$ . È pertanto immediato verificare che i vettori  $(0, 0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 0, 1)$  completano  $\mathcal{B}$  in una base di  $\mathbb{R}^4$ . Richiediamo dunque che  $W$  contenga tali vettori. Inoltre, poiché la somma di  $S$  e  $W$  non deve essere diretta, la dimensione di  $W$  deve essere maggiore di 2. Possiamo scegliere, ad esempio,  $W = \langle (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$ .

(e) Dal momento che  $S + T = S = \langle (1, 2, -1, 2), (0, 1, 0, 3) \rangle$ , si tratta di individuare due sottospazi  $V_1$  e  $V_2$  tali che  $V_1 \oplus V_2 = \langle (1, 2, -1, 2), (0, 1, 0, 3) \rangle$ . Possiamo scegliere, ad esempio,  $V_1 = \langle (1, 2, -1, 2) \rangle$  e  $V_2 = \langle (0, 1, 0, 3) \rangle$ . Naturalmente  $V_1$  e  $V_2$  non sono univocamente determinati: una delle altre infinite scelte possibili è:  $V_1 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$  e  $V_2 = S$ .

**Esercizio 3** Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  e sia  $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  l'applicazione lineare definita da:  $f(X) = AX$ .

- Determinare la matrice  $F$  associata ad  $f$  rispetto alla base canonica di  $M_2(\mathbb{R})$ .
- Determinare nucleo e immagine di  $f$ .
- Sia  $\mathcal{B}_k = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix} \right\}$ . Stabilire per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  l'insieme  $\mathcal{B}_k$  è una base di  $M_2(\mathbb{R})$ .
- Per i valori di  $k$  trovati in (c), determinare la matrice  $F_k$  associata ad  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B}_k$ . Le matrici  $F_1$  e  $F_2$  sono simili?
- Costruire, se possibile, una funzione lineare  $g : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $g \circ f$  sia suriettiva ed una funzione  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  tale che  $f \circ h$  sia iniettiva.

**Svolgimento.** Scriviamo la funzione  $f$  in forma esplicita:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ a + c & b + d \end{pmatrix}.$$

(a) Per costruire la matrice  $F$  dobbiamo calcolare le immagini, mediante  $f$ , dei vettori della base canonica di  $M_2(\mathbb{R})$ : si ha pertanto

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Abbiamo:  $\dim(\text{Im}f) = \text{rg}(F) = 2$ , pertanto, per il Teorema delle dimensioni,  $\dim(\ker f) = 2$ . L'immagine di  $f$  è generata dalle colonne della matrice  $F$ , pertanto  $\text{Im}f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .

Il nucleo di  $f$  si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato ad  $F$ :  $\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .

(c) Scriviamo i vettori di  $\mathcal{B}_k$  in coordinate rispetto alla base canonica e collochiamoli sulle righe di una matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 & k \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

I vettori di  $\mathcal{B}_k$  sono linearmente indipendenti se e solo se il determinante della matrice costruita è non nullo: tale determinante è uguale a  $k$ , pertanto  $\mathcal{B}_k$  è una base di  $\mathbb{R}^4$  per ogni  $k \neq 0$ .

(d) Le matrici  $F_1$  e  $F_2$  sono certamente simili perché sono le matrici di  $f$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$ . Per determinare la matrice  $F_k$  costruiamo il seguente diagramma, in cui  $\mathcal{C}$  indica la base canonica di  $\mathbb{R}^4$ :

$$(\mathbb{R}^4, \mathcal{B}_k) \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^4}} (\mathbb{R}^4, \mathcal{C}) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^4, \mathcal{C}) \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^4}} (\mathbb{R}^4, \mathcal{B}_k).$$

Si ha:  $F_k = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_k} F M_{\mathcal{B}_k}^{\mathcal{C}}$ , dove  $M_{\mathcal{B}_k}^{\mathcal{C}}$  è la matrice del cambiamento di base dalla base  $\mathcal{B}_k$  alla base  $\mathcal{C}$ , cioè

$$M_{\mathcal{B}_k}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix},$$

e  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_k} = (M_{\mathcal{B}_k}^{\mathcal{C}})^{-1}$ . Lasciamo allo studente il calcolo dell'inversa della matrice  $M_{\mathcal{B}_k}^{\mathcal{C}}$  e il calcolo del profotito  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_k} F M_{\mathcal{B}_k}^{\mathcal{C}}$ .

(e) Rispondendo alla domanda (a) abbiamo trovato  $\dim(\text{Im}f) = 2$ . Di conseguenza non esiste alcuna applicazione lineare  $g : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $g \circ f$  sia suriettiva.

Analogamente, se si avesse  $f \circ h$  iniettiva, per una funzione lineare  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ , per il Teorema delle dimensioni si avrebbe  $\dim(\text{Im}(f \circ h)) = 3$ , ma questo non è possibile dal momento che  $\text{Im}(f \circ h) \subset \text{Im}f$ .