

## Schema della lezione del 2 febbraio 2005

Corso di Matematica 2

Ingegneria Meccanica - II squadra

**Definizione 1** Data una matrice  $A$  si chiama *pivot* di una riga di  $A$  il primo elemento non nullo di quella riga.

**Definizione 2** Una matrice si dice a scala (per righe) se le righe nulle sono le ultime e il pivot di ogni riga non nulla si trova più a destra del pivot della riga precedente.

**Esempio 1** La matrice  $A = \begin{pmatrix} \underline{2} & -1/2 & 1 & 4 \\ 0 & \underline{2} & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix}$  è una matrice a scala. I pivot sono le entrate della matrice sottolineate.

La matrice  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$  NON è una matrice a scala.

**Osservazione 1** In una matrice a scala le righe non nulle sono linearmente indipendenti. Quindi il rango di una matrice a scala  $A$  è uguale al numero di righe non nulle di  $A$ .

In una matrice a scala le colonne contenenti i pivot sono linearmente indipendenti.

**Problema** Ridurre a scala una matrice.

**Procedimento** Si utilizzano le cosiddette *operazioni elementari sulle righe della matrice* cioè le seguenti operazioni:

- Scambio di righe
- Moltiplicazione di una riga per uno scalare  $\alpha \neq 0$
- Sostituzione della riga  $i$ -esima con la somma della riga  $i$ -esima con la riga  $j$ -esima moltiplicata per un qualsiasi scalare  $\alpha$ .

Illustriamo la riduzione a scala su un esempio:

**Esempio 2** Sia  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -7 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ .

L'elemento di posto 1,1 della matrice  $A$  è non nullo, pertanto lasciamo invariata la prima riga di  $A$ .

Alla seconda riga di  $A$  sostituiamo la somma della seconda riga con la prima. Otteniamo così la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alla terza riga della matrice ottenuta sostituiamo la somma della terza riga con la prima moltiplicata per -2:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alla terza riga della matrice ottenuta sostituiamo la somma della terza riga con la seconda moltiplicata per -1:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice ottenuta è una matrice a scala di rango 2.

**Osservazione importante** Effettuando operazioni elementari sulle righe di una matrice  $A$ :

- NON cambia il sottospazio generato dalle righe;
- NON cambia la dimensione del sottospazio generato dalle colonne;
- NON cambia il rango della matrice.

Nell'Esempio 2, dunque, si ha:  $rg(A) = 2$ .

**Problema** Risolvere il sistema lineare  $A\underline{x} = \underline{b}$  dove:

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Si tratta di un sistema di  $m$  equazioni nelle  $n$  incognite  $x_1, \dots, x_n$ .

**Strategia:** Leggo  $A$  come la matrice associata ad una applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

rispetto alle basi canoniche di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ . Allora risolvere il sistema lineare dato è equivalente a determinare  $L^{-1}(\underline{b})$ .

**Domanda 1** Il sistema ha soluzioni?

**Risposta** Il sistema ha soluzioni se e solo se  $rg(A) = rg(A|\underline{b})$ .

**Definizione** Un sistema lineare si dice *compatibile* se ammette soluzioni.

Sia  $A\underline{x} = \underline{b}$  compatibile. L'insieme  $S$  delle soluzioni del sistema  $A\underline{x} = \underline{b}$  ha la struttura seguente:

$$S = v_1 + \ker A$$

dove  $v_1 \in \mathbb{R}^n$  è una soluzione particolare del sistema. Ricordiamo che:

$$\dim(\ker(A)) = n - \dim(\text{Im}(A)) = n - rg(A).$$

**Domanda 2** Quante soluzioni ha il sistema compatibile  $A\underline{x} = \underline{b}$ ?

**Risposta** Un sistema lineare compatibile  $A\underline{x} = \underline{b}$  ha:

- una sola soluzione se  $rg(A) = n$  = numero di variabili del sistema
- infinite soluzioni se  $rg(A) < n$ .

**Domanda 3** Descrivere tutte le soluzioni del sistema compatibile  $A\underline{x} = \underline{b}$ .

**Risposta** Si tratta di:

1. Determinare  $\ker A$

2. Determinare una soluzione particolare del sistema

**Come si procede:**

1. Si riduce la matrice completa  $(A|\underline{b})$  a scala (per righe):  $(A'|\underline{b}')$ ;
2. Si calcolano  $rg(A) = rg(A')$  e  $rg(A|b) = rg(A'|\underline{b}')$ .
3. Se  $rg(A) \neq rg(A|b)$  il sistema non ha soluzioni e il problema è risolto.  
Se  $rg(A) = rg(A|b)$  il sistema è compatibile cioè ammette soluzioni. I sistemi  $A\underline{x} = \underline{b}$  e  $A'\underline{x} = \underline{b}'$  sono equivalenti perciò basta risolvere il sistema  $A'\underline{x} = \underline{b}'$ . In particolare  $\ker A = \ker A'$ .
4. Per risolvere  $A'\underline{x} = \underline{b}'$  ( $A'$  e  $(A'|\underline{b}')$  sono in forma a scala) basta:
  - 1) Determinare  $\ker A'$  cioè risolvere il sistema  $A'\underline{x} = 0$ . Si procede per sostituzione dal basso.
  - 2) Determinare una soluzione particolare  $v_1$  di  $A'\underline{x} = \underline{b}'$ . Conviene in tal caso lasciare libere le variabili corrispondenti ai pivot, assegnare valori arbitrari alle altre e procedere per sostituzione.

L'insieme  $S$  delle soluzioni del sistema dato è:  $S = v_1 + \ker(A')$ .