



Scrivete cognome e nome in ogni foglio consegnato. Consegnate lo svolgimento della parte 1 (il **FRONTE** di questo foglio) nella pila etichettata 1, consegnate lo svolgimento della parte 2 (il **RETRO** di questo foglio) nella pila etichettata 2.

## Parte 1

**Esercizio 1.** Si consideri il campo vettoriale  $\mathbb{R}^3$

$$X = \begin{pmatrix} yz^2 \\ -(x-1)^2xz^2 \\ (2-x)x^2yz \end{pmatrix}$$

- Si calcolino gli equilibri di  $X$ .
- Si linearizzi  $X$  all'equilibrio  $(1, 0, 2)$  e si discuta la stabilità di tale equilibrio. In particolare si spieghi perché tale equilibrio non può essere asintoticamente stabile.
- Si mostri che la funzione  $F = x^2 + y^2 - z^2$  è integrale primo per il campo vettoriale  $X$ .
- Si dimostri che il campo vettoriale  $X$  ristretto agli insiemi di livello  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = -R^2, z > 0\}$  è coniugato ad un campo vettoriale il cui ritratto in fase coincide con quello del campo vettoriale  $Y = \begin{pmatrix} y \\ -x(x-1)^2 \end{pmatrix}$  (in questo punto si possono usare le coordinate  $x, y$  per parametrizzare gli insiemi di livello).
- Si usi quanto imparato sulle equazioni di Newton per disegnare il ritratto in fase del campo vettoriale  $Y$ . Si evidenzino nel ritratto in fase le orbite non-periodiche. Il ritratto in fase appena disegnato permette di dedurre qualcosa sulla stabilità dell'equilibrio di cui al punto **b**?

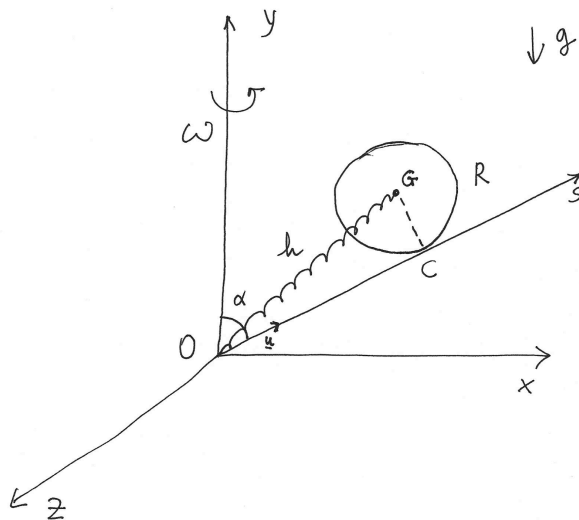
**Teoria 2.**

- Sia  $A$  una matrice  $n \times n$ . Si dia la definizione di  $e^A$ , l'esponenziale di  $A$ , e se ne dimostri la buona definizione.
- In che modo l'esponenziale appena introdotta permette di definire il flusso del campo vettoriale lineare  $X(x) = Ax$ ?

## Parte 2

**Esercizio 3.** Nel piano  $Oxy$ , ove  $y$  è verticale ascendente,  $\mathbf{g} = -g\hat{y}$ ,  $g > 0$ , si consideri il sistema formato da una guida rettilinea formante un angolo  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  con l'asse  $y$ , da un disco *di massa nulla* vincolato a ruotare senza strisciare sulla guida e da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato nel centro  $G$  del disco. Il piano  $Oxy$  ruota con velocità angolare  $\bar{\omega} = \omega\hat{y}$  costante rispetto ad un riferimento inerziale. Inoltre, tra l'origine  $O$  e il punto  $P$  è tesa una molla di costante elastica  $h > 0$ . Si descriva la posizione di  $P$  usando l'ascissa curvilinea  $s$  del punto di contatto  $C$  tra guida e disco, orientata positivamente nella direzione del versore  $\mathbf{u} = \sin\alpha\hat{x} + \cos\alpha\hat{y}$ .

- determinare le configurazioni di equilibrio *relativo*, cioè nel riferimento non inerziale  $Oxyz$  e studiare la loro stabilità al variare del parametro  $\omega$  in base ai teoremi visti nel corso
- come si modifica la discussione sulla stabilità del punto (a) se si aggiunge una forza viscosa agente su  $P$ ,  $F_P = -kv_P$ ,  $K > 0$ ?
- scrivere l'energia cinetica del sistema e l'equazione di Lagrange del moto nell'ipotesi che agisca la forza viscosa. Si potrebbe indagare ora la stabilità degli equilibri con il teorema spettrale dopo aver linearizzato le equazioni di Lagrange attorno ad un equilibrio? [suggerimento: svolgere il conto scrivendo semplicemente  $U(s)$  e specificando solo alla fine la forma funzionale di  $U$ ]



**Teoria 4.** Enunciato e dimostrazione del teorema di Lagrange-Dirichlet.

**Esercizio 1.**

a. dalla prima equazione o  $z = 0$ , da cui si ottiene immediatamente che l'intero piano  $x, y$  è fatto di equilibri, oppure  $y = 0$ . In questo secondo caso si ha che deve essere  $x(x - 1)^2 = 0$ , da cui  $x = 0$  oppure  $x = 1$ . Si hanno quindi, oltre al piano  $z$  le due rette di equilibri  $\{y = 0, x = 0\}$  e  $\{y = 0, x = 1\}$ .

b. la Jacobiana di  $X$  è

$$\frac{\partial X}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 0 & z^2 & 2yz \\ -(x-1)^2 z^2 - 2(x-1)xz^2 & 0 & -2(x-1)^2 xz \\ 2(2-x)xyz - x^2 yz & (2-x)x^2 z & (2-x)x^2 y \end{pmatrix},$$

la Jacobiana calcolata nell'equilibrio  $(1, 0, 2)$  è

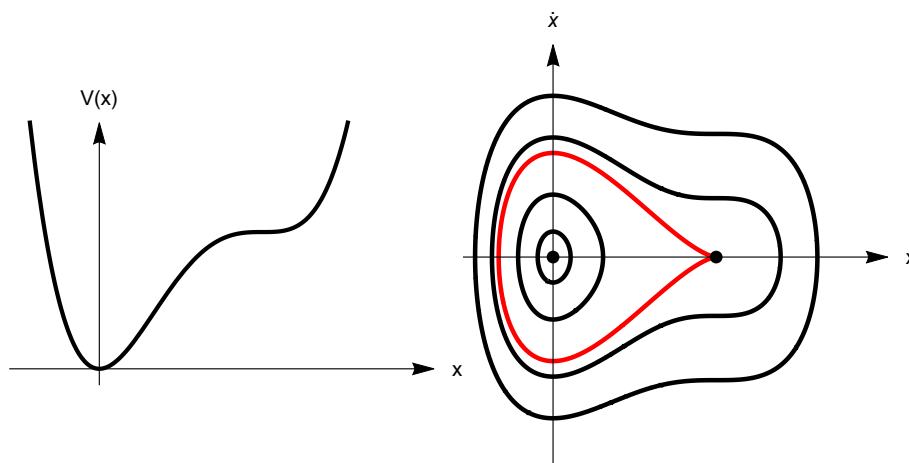
$$\left. \frac{\partial X}{\partial(x, y, z)} \right|_{(1,0,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quest'ultima è la matrice della linearizzazione. Tale matrice ha polinomio caratteristico  $\lambda^3 = 0$ , quindi il metodo spettrale non permette di ottenere informazioni sulla stabilità dell'equilibrio. La presenza di una retta di equilibri alla quale appartiene l'equilibrio in questione permette però di negare la sua stabilità asintotica. Anche la presenza dell'integrale primo del punto **c** permette di concludere lo stesso fatto.

c. È un conto algebrico facile.

d. Si possono usare le coordinate  $x, y$  per parametrizzare le superfici di livello (che sono una falda di iperboloide) e si ottiene che in tali coordinate il campo vettoriale  $X$  induce il campo vettoriale  $(x^2 + y^2 + R^2)Y$ . Tale campo vettoriale è ottenuto moltiplicando  $Y$  per una funzione sempre positiva, e quindi ha orbite che differiscono da quelle di  $Y$  per un riscaldamento temporale.

e. il campo vettoriale  $Y$  corrisponde al sistema del II ordine associato ad un problema di Newton 1-dimensionale per una particella materiale di massa 1 soggetta ad un campo di forze di energia potenziale  $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ . Il ritratto in fase è quindi



L'unica orbita non-periodica è quella disegnata in rosso. Tale orbita ed anche quelle immediatamente vicine permettono di dimostrare l'instabilità dell'equilibrio  $(1, 0, 2)$ , che corrisponde proprio all'equilibrio instabile  $(1, 0)$  del disegno (per un particolare valore di  $R$ ).

### Esercizio 3.

- a. Nel sistema rotante agiscono la forza di gravità, la forza elastica e la forza centrifuga, tutte conservative, e la forza di Coriolis. Quest'ultima è nulla negli equilibri e quindi non interviene nella determinazione degli stessi. Inoltre, le sue componenti lagrangiane sono nulle perchè la forza  $F^{cor} = -2m\omega \wedge v_P$  è ortogonale al piano  $Oxy$  mentre gli spostamenti virtuali di  $P$  vi appartengono. Quindi posso applicare THND, oltre che TLD per studiare la stabilità degli equilibri. Osservo infine che  $y_P = y_C + cost$ . L'energia potenziale totale è

$$U = U^g + U^{el} + U^{cf} = mgy_C + \frac{h}{2}OP^2 - \frac{m\omega^2}{2}P'P^2$$

$$U(s) = mg \cos \alpha s + \frac{h}{2}s^2 - \frac{m\omega^2}{2}(s \sin \alpha - R \cos \alpha)^2.$$

Calcolo gli equilibri.

$$U'(s) = mg \cos \alpha + (h - m\omega^2 \sin^2 \alpha)s + m\omega^2 R \cos \alpha \sin \alpha = 0$$

porge

$$s^* = \frac{m(g + \omega^2 R \sin \alpha) \cos \alpha}{m\omega^2 \sin^2 \alpha - h}, \quad h \neq m\omega^2 \sin^2 \alpha.$$

Se  $h = m\omega^2 \sin^2 \alpha$  non vi sono equilibri. Studio stabilità con THND.  $U(s)$  è una parabola.

$$H_U(s^*) = U''(s^*) = h - m\omega^2 \sin^2 \alpha$$

Quindi  $S^*$  è stabile se

$$\omega^2 < \frac{h}{m \sin^2 \alpha}$$

e instabile se

$$\omega^2 > \frac{h}{m \sin^2 \alpha}.$$

- b. L'unica forza agente ortogonalmente al piano è la forza di Coriolis, che deve essere bilanciata dalla reazione  $\Phi = \Phi \hat{z}$ . Si ha quindi

$$\Phi = -F^{cor} = 2m\omega \hat{y} \wedge v_P = 2m\omega \hat{y} \wedge \dot{s} \mathbf{u} = -2m\omega \dot{s} \sin \alpha \hat{z}.$$

- c. La forza viscosa in  $P$  ha componente Lagrangiana data da

$$\delta L = F_P \cdot \delta G = -k \dot{s} \mathbf{u} \cdot \delta s \mathbf{u} = Q \delta s, \quad \Rightarrow \quad Q = -k \dot{s}.$$

La presenza di  $F_P$ , nulla negli equilibri, non altera gli stessi, ma impedisce di usare THND. Gli equilibri prima stabili (per TLD) rimangono tali, mentre per quelli prima instabili ora non posso dire nulla.

- d. L'energia cinetica del punto è semplicemente  $T_P = \frac{1}{2}mv_P^2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2$ . La lagrangiana è

$$L = T_P - U = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mg \cos \alpha s + \frac{h}{2}s^2 - \frac{m\omega^2}{2}(s \sin \alpha - R \cos \alpha)^2$$

L'equazione di Lagrange, tenendo conto delle forze conservative e non conservative presenti è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = -U'(s) + Q(\dot{s})$$

ovvero

$$m\ddot{s} = -U'(s) + Q = -U'(s) - k\dot{s}$$

Dopo aver scritto l'equazione al primo ordine, la matrice del sistema linearizzato valutata nell'equilibrio  $s^*$  è

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{U''(s)}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice  $A(s)$ , costante, usando la formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A)}{2} \pm \frac{\sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

si ottiene

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \frac{\sqrt{\frac{k^2}{m^2} - 4\frac{U''(s^*)}{m}}}{2}$$

Si vede che se  $U''(s^*) > 0$  un autovalore ha parte reale positiva, quindi l'equilibrio instabile rimane instabile con l'aggiunta della forza viscosa, mentre se  $U''(s^*) < 0$  tutti gli autovalori hanno parte reale negativa quindi gli equilibri prima stabili diventano asintoticamente stabili.