

Esercizi di MATEMATICA DISCRETA — 6 — con risultati
A.A. 2007/2008

1. [Tucker, es. pag. 287 n. 3] Trovare una relazione di ricorrenza che conti il numero di modi di sistemare delle auto in riga di n spazi, se vengono utilizzate Cadillacs, FIAT o Ford. Una Cadillac richiede 2 spazi, mentre una FIAT o una Ford richiedono solamente uno spazio ciascuna.
[Ris.: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ con $a_1 = 2, a_2 = 5$]

2. [Tucker, es. pag. 287 n. 7] Trovare una relazione di ricorrenza per valutare il numero di coppie di conigli dopo n mesi se:

(1) inizialmente vi è solo una coppia di conigli appena nati,

(2) ogni mese, ogni coppia di conigli che ha più di un mese genera una nuova coppia di conigli.

[Ris.: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ con $a_0 = 1, a_1 = 1$]

3. [Tucker, es. pag. 289 n. 29] Trovare una relazione di ricorrenza per descrivere il numero di modi per selezionare n oggetti fra k tipi, con al più 3 oggetti per ogni tipo.

[Ris.: $a_{n,k} = a_{n,k-1} + a_{n-1,k-1} + a_{n-2,k-1} + a_{n-3,k-1}$ con $a_{n,1} = 1$ per $n \leq 3, a_{n,1} = 0$ per $n \geq 4$]

4. [Tucker, es. pag. 288 n. 15] Trovare una relazione di ricorrenza per la quantità di denaro presente in un conto dopo n anni se il tasso di interesse è del 6 per cento, e all'inizio di ogni anno vengono aggiunti 50 euro (a_n = quantità di denaro alla fine dell'anno n , dopo il calcolo degli interessi maturati nell'anno n).

[Ris.: $a_n = (a_{n-1} + 50) \cdot \frac{106}{100}$ con $a_1 = 50 \cdot \frac{106}{100}$]

5. [Tucker, es. pag. 289 n. 23] Trovare una relazione di ricorrenza per il numero di sequenze quaternarie (cioè ad elementi in $\{0, 1, 2, 3\}$) di lunghezza n , con almeno un 1, e con il primo 1 che precede il primo 0 (se la sequenza contiene almeno un 0).

[Ris.: $a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$ con $a_1 = 1$]

6. [Tucker, es. pag. 299 n. 3a] Risolvere la seguente relazione di ricorrenza:

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}, \quad a_0 = a_1 = 1.$$

[Ris.: $a_n = \frac{2}{5}4^n + \frac{3}{5}(-1)^n$]

7. [Tucker, esempio pag. 298] Risolvere la seguente relazione di ricorrenza:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = 1, a_2 = 2.$$

[Ris.: $a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$]

8. [Tucker, es. pag. 300 n. 11] Supponete che la relazione di ricorrenza:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

abbia come soluzione generale la seguente:

$$a_n = A3^n + B6^n.$$

Trovate quali valori devono assumere i due coefficienti c_1 e c_2 .

[Ris.: $c_1 = 9$, $c_2 = -18$]

9. [Tucker, es. pag. 303 n. 1a] Risolvere la seguente relazione di ricorrenza:

$$a_n = a_{n-1} + 3(n-1), \quad a_0 = 1.$$

[Ris.: $a_n = 1 + \frac{3}{2}n(n-1)$]

10. [Tucker, es. pag. 303 n. 9d] Risolvere la seguente relazione di ricorrenza:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2n^2, \quad a_0 = 3.$$

[Ris.: $a_n = 15 \cdot 2^n - 2n^2 - 8n - 12$]

11. Risolvere la seguente relazione di ricorrenza:

$$a_n = 4a_{n-1} + 6 \times 4^n - 5n, \quad a_0 = 2.$$

[Ris.: $a_n = -\frac{2}{9} \cdot 4^n + 6n \cdot 4^n + \frac{5}{3}n + \frac{20}{9}$]

12. [Tucker, esempio pag. 302] Risolvere la seguente relazione:

$$a_n = 3a_{n-1} - 4n + 3 \times 2^n, \quad a_1 = 8.$$

[Ris.: $a_n = 5 \cdot 3^n + 2n + 3 - 6 \cdot 2^n$]

13. [Tucker, es. pag. 295 n. 1a] Risolvere la seguente relazione di ricorrenza:

$$a_n = 2 a_{\frac{n}{2}} + 5, \quad a_1 = 1.$$

[Ris.: $a_n = 6n - 5$]

14. [Tucker, es. pag. 296 n. 9] Trovare una procedura di tipo *dividi e conquista* per selezionare il massimo in un insieme di n interi distinti, supponendo che n sia una potenza di 2. Trovare una relazione di ricorrenza per contare il numero di confronti necessari per questa procedura, e risolverla.

[Ris.: $a_n = 2a_{n/2} + 1$ con $a_2 = 1$, la cui soluzione è $a_n = n - 1$]