

Curriculum vitae  
di  
Francesco Ciraulo

10 Febbraio 2011

## 1 Dati personali

Data di nascita: 16 Maggio 1980.

Luogo di nascita: Palermo.

**Posizione attuale** (dal 01/05/2011)

Titolare di assegno di ricerca.

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata - Università degli Studi di Padova

Titolo del progetto di ricerca: “Sviluppo predicativo e intuizionistico della teoria dei topos di Grothendieck”.

Settore scientifico disciplinare: MAT/01.

Tutor: Prof. Giovanni Sambin.

## 2 Titoli di studio

- **Dottorato di ricerca in Matematica**

Dipartimento di Matematica e Applicazioni

Università degli Studi di Palermo

Data di conseguimento del titolo: 23/03/2007.

Titolo della tesi di dottorato: “Constructive satisfiability”.

Membri della commissione esaminatrice: Prof. A. Brigaglia (Palermo), Prof. G. Sambin (Padova), Prof. G. Rosolini (Genova).

Nota: con borsa di studio.

- **Laurea in Matematica** (Vecchio Ordinamento)

Università degli Studi di Palermo  
Data di conseguimento: 18/06/2003.

Votazione: 110/110 e lode.

Titolo della tesi: “Una classe di gruppi imprimitivi”.  
Relatore: Prof. Claudio G. Bartolone.

Nota: premio di laurea E. Gugino dell’Università degli Studi di Palermo per la migliore tesi di laurea in Matematica (bando di gara relativo agli anni accademici 2001/02-2002/03-2003/04).

- **Diploma di maturità**

Liceo Scientifico Statale “N. Palmeri” di Termini Imerese (PA)  
A. S. 1998-99  
Votazione: 100/100 ed encomio.

### 3 Ruoli e incarichi

- Titolare di assegno di ricerca.

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata  
Università degli Studi di Padova  
Titolo del progetto di ricerca: “Sviluppo predicativo e intuizionistico della teoria dei topos di Grothendieck”.  
Settore scientifico disciplinare: MAT/01.  
Tutor: Prof. Giovanni Sambin.

- Dal 20/06/2007 al 31/03/2011.

Titolare di assegno di ricerca

Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università degli Studi di Palermo  
Titolo del progetto di ricerca: “Logica e matematica costruttive”  
Settore scientifico disciplinare: MAT/04  
Tutors: Prof.ssa Grazia Indovina e Dott.ssa Cinzia Cerroni.

- Anno Accademico 2008/2009

Docente del “Laboratorio di Didattica dei Giochi Matematici”

Scuola Interuniversitaria Siciliana di Specializzazione per l’Insegnamento Secondario (IX Ciclo) - Indirizzo “Fisico Matematico”.

- Anno Accademico 2007/2008

Docente a contratto del corso di “Elementi di Logica Matematica”

Corsi di laurea in “Matematica per l’Informatica e la Comunicazione Scientifica”.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali - Università degli Studi di Palermo.

- Anno Accademico 2006/2007

Docente a contratto del corso di “Elementi di Logica Matematica”

Corsi di laurea in “Matematica” e “Matematica per l’informatica e la Comunicazione Scientifica”.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali - Università degli Studi di Palermo.

## 4 Attività didattica

### 4.1 Insegnamenti in corsi di laurea e post-lauream

- **Laboratorio di Didattica dei Giochi Matematici**

Anno Accademico 2008/2009

Scuola Interuniversitaria Siciliana di Specializzazione per l’Insegnamento Secondario - IX Ciclo - Indirizzo “Fisico Matematico”

Numero di ore: 25

Programma del corso.

I giochi nei curricula di Matematica della scuola secondaria. Il gioco come situazione a-didattica. I giochi matematici dall’antichità ad oggi e nelle diverse culture. Giochi logici e logica dei giochi: paradossi e rompicapi. Giochi geometrici: esperienze spaziali e software di Geometria dinamica. Giochi matematici e problem solving: giochi o esercizi? Le gare di matematica: analisi di un successo inatteso.

- **Elementi di Logica Matematica**

Anni Accademici 2006/2007 e 2007/2008

Corso di laurea in “Matematica per l’Informatica e la Comunicazione Scientifica”

Anno di corso: 1°

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali - Università degli Studi di Palermo.

Numero di crediti formativi: 6

Numero di ore: 48

Programma del corso.

LOGICA PROPOSIZIONALE. Linguaggio e formule. Semantica. Il calcolo della deduzione naturale. Forma normale congiuntiva. Forma normale disgiuntiva. Il calcolo alla Hilbert. Il teorema di validità e completezza. LOGICA DEI PREDICATI. Linguaggi del primo ordine. Variabili libere e variabili legate. Semantica: interpretazioni. Sintassi: deduzione naturale per la logica predicativa. Le regole per i quantificatori. Forma normale prenessa. Assiomi sull'uguaglianza. Teorema di completezza per la logica del primo ordine. Il teorema di compattezza. LOGICA INTUZIONISTA. Cenni sulle logiche modali. Enunciato dei teoremi di incompletezza di Gödel. Complementi di teoria degli insiemi: relazioni d'ordine (alberi, algebre di Boole, algebre di Heyting); assioma della scelta e lemma di Zorn; cardinalità.

## 4.2 Altre esperienze didattiche

- Anni Accademici 2008/09, 2009/2010 e 2010/2011.  
Componente della commissione d'esami del corso di "Elementi di Logica Matematica" per il 1° anno del corso di laurea in "Matematica per l'informatica e la Comunicazione Scientifica" presso la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università degli Studi di Palermo.
- Dal 29 Ottobre 2009 al 24 Gennaio 2010.  
Docente per la classe di concorso A059 presso il Primo Istituto Comprensivo "Francesco Petrarca" di Padova.
- Dal 3 Marzo 2009 al 28 Aprile 2009.  
Docente del laboratorio di "Dimostrazione e Giochi Matematici" presso il Liceo Classico "Francesco Scaduto" di Bagheria (PA) nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche per l'A. S. 2008/09.
- Dal 2 Ottobre 2008 al 13 Novembre 2008, 30 ore  
Docente del corso "La certezza" rivolto agli studenti del biennio dell'Istituto d'Istruzione Secondaria Superiore "N. Palmeri" di Termini Imerese (PA), nell'ambito del Programma Operativo Nazionale "La scuola per lo sviluppo" (annualità 2007-2013).
- Dal 28 Marzo 2008 al 12 Giugno 2008, 30 ore.  
Docente del corso di aggiornamento "Per una didattica della matematica più stimolante ed interessante" rivolto a 25 docenti della scuola primaria dell'Istituto Comprensivo Statale "Giovanni XXIII" di Trabia (PA), nell'ambito del Programma Operativo Nazionale "La scuola per lo sviluppo" (annualità 2007-2013).
- Anno accademico 2005/06.  
Esercitatore e membro della commissione d'esami del corso di "Elementi di Logica Matematica" per il 1° anno del corso di laurea triennale in "Matematica per l'informatica e la Comunicazione Scientifica" presso la

## 5 Pubblicazioni

### 5.1 Pubblicazioni su riviste internazionali con refereeing

1. F. Ciraulo - M. E. Maietti - P. Toto, *Constructive version of Boolean algebra*, **Logic Journal of the IGPL**, accettato per la pubblicazione.
2. F. Ciraulo, *A constructive investigation of satisfiability*, **Annals of Pure and Applied Logic** 163, pp. 111-121 (2012).
3. F. Ciraulo, *Regular opens in Formal Topology and a representation theorem for overlap algebras*, **Annals of Pure and Applied Logic**, accettato per la pubblicazione.
4. F. Ciraulo - G. Sambin, *The overlap algebra of regular opens*, **Journal of Pure and Applied Algebra** 214, pp. 1988 -1995 (2010).
5. C.G. Bartolone - F. Ciraulo, *A Class of Imprimitive Groups*, **Algebra Colloquium** 17, pp. 565-576 (2010).
6. F. Ciraulo, *A constructive semantics for non-deducibility*, **Mathematical Logic Quarterly** 54, pp. 35-48 (2008).
7. F. Ciraulo - G. Sambin, *Finiteness in a Minimalist Foundation*, in M. Miculan, I. Scagnetto, and F. Honsell (Eds.): **TYPES 2007, Lecture Notes in Computer Science** 4941, pp. 51-68 (2008).
8. F. Ciraulo - G. Sambin, *Finitary Formal Topologies and Stone's Representation Theorem*, **Theoretical Computer Science** 405, pp. 11-23 (2008).

### 5.2 Altre pubblicazioni

9. F. Ciraulo, *Sull'algebra degli insiemi in matematica intuizionista*, atti del congresso "La ricerca logica in Italia" (in onore di Corrado Mangione), Milano 10-11 Settembre 2009, pp. 143-157 (in via di pubblicazione).
10. F. Ciraulo, *Soddisfacibilità costruttiva*, *La Matematica nella Società e nella Cultura*, *Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, Serie I, Vol. I, pp. 275-278 (2008).

### 5.3 Pubblicazioni elettroniche e preprint

11. F. Ciraulo - G. Sambin, *A Galois connection between closure and interior operators*, arXiv:1101.5896 (2011).
12. F. Ciraulo - M. E. Maietti - G. Sambin, *Convergence in Formal Topology*, Preprint n. 342, Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università degli Studi di Palermo (2008).
13. F. Ciraulo - G. Sambin, *Tense logic within a constructive metatheory*, Preprint n. 341, Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università degli Studi di Palermo (2008).

### 5.4 Articoli sottomessi ed in preparazione

14. F. Ciraulo - M. E. Maietti, *Constructive Dedekind-MacNeille completion*, in preparazione.

## 6 Comunicazioni scientifiche

### 6.1 Comunicazioni scientifiche su invito

1. “The overlap relation in intuitionistic lattice theory”, seminario tenuto presso l’Università del Canterbury, Christchurch, Nuova Zelanda, 3 Dicembre 2010.
2. “The role of the overlap relation in constructive mathematics” al workshop *Constructive Mathematics: Proofs and Computation*, Fraueninsel (Chiemsee), Germania, 7 Giugno 2010.
3. “A Galois Connection between Basic Covers and Binary Positivities” al *Workshop on Constructive Aspects of Logic and Mathematics*, Japan Advanced Institute of Science and Technology, Kanazawa, Giappone, 8 Marzo 2010.
4. “Fondazione costruttiva della Matematica”, intervento a due voci insieme a Giovanni Sambin al congresso *La ricerca logica in Italia* in onore di Corrado Mangione, Milano, 11 Settembre 2009.
5. “The overlap algebra of regular opens” alla conferenza *Advances in Constructive Topology and Logical Foundations* in onore di Giovanni Sambin in occasione del suo 60° compleanno, Padova, 9 Ottobre 2008.

### 6.2 Altre comunicazioni scientifiche

6. “The overlap relation in intuitionistic lattice theory” al *XXIV Incontro di Logica* (organizzato dall’AILA), 2-4 Febbraio 2011, Bologna.

7. “What is a binary positivity for a locale?” al *Workshop on Constructive Topology*, Palermo, 6-7 Settembre 2010 (organizzatori: Francesco Ciraulo, Nicola Gambino e Giovanni Sambin).
8. “La logica del gioco”, al convegno *Quale Logica per la Didattica*, Verona, 23-25 Ottobre 2009.
9. “Regular opens in formal topology and representation theorem for overlap-algebras” al *Leeds Symposium on Proof Theory and Constructivism*, Leeds, Regno Unito, 3-16 Luglio 2009.
10. “Satisfiability and Consistency from a constructive point of view” al *XXIII Incontro di Logica*, Genova, 20-23 Febbraio 2008.
11. “A constructive treatment of satisfiability (with an application to tense logic)” al *3rd Workshop on Formal Topology*, Padova, 7-12 Maggio 2007.
12. “A constructive semantical treatment of LJ-non-deducibility” al workshop *Trends in Constructive Mathematics* (in occasione del sessantesimo compleanno del Prof. Douglas Bridges), Frauenwörth, Germania, 19-23 Giugno 2006.
13. “On finitary formal topologies” al convegno *Constructive Logic and Mathematics*, Benediktbeuern, Germania, 15-19 Novembre 2004.

### 6.3 Attività di divulgazione e seminari pubblici

14. Intervento all’incontro pubblico “Briciole di Matematica”, Palazzo Moroni, Padova, 7 Maggio 2007 (un’iniziativa collegata al 3rd Workshop on Formal Topology).

## 7 Altre esperienze

### 7.1 Organizzazione di convegni

- Workshop on Constructive Topology

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università degli Studi di Palermo - 6-7 Settembre 2010

Organizzatori: Francesco Ciraulo, Nicola Gambino e Giovanni Sambin.

### 7.2 Visite ad altre università

- Dal 18 Novembre 2010 al 15 Dicembre 2010

Department of Mathematics and Statistics, University of Canterbury Christchurch, New Zealand

Ospite del Prof. Douglas S. Bridges nell'ambito del Marie Curie International Research Staff Exchange Scheme denominato CONSTRUMATH.

- Diversi periodi di visita a partire dall'A.A. 2003/04 ad oggi.

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università degli Studi di Padova per collaborazione scientifica con il Prof. G. Sambin.

### 7.3 Partecipazione a convegni e scuole di formazione

1. Tutorials associati al Third Workshop on Formal Topology, Padova, 7-8 Maggio 2007.
2. Scuola estiva Mathematical Logic and Applications, Fischbachau, Germania, 5-9 Settembre 2005.
3. Scuola Estiva di Logica patrocinata dall'AILA, dalla SILFS e dall'Università di Milano, Gargnano del Garda (BS), 28 Agosto - 3 Settembre 2005.
4. Partecipazione al XXII Incontro di Logica Matematica (organizzato dall'AILA), Pisa, 10-13 Febbraio 2005.
5. Partecipazione al convegno Combinatorics '04, Capomulini (CT), 12-18 Settembre 2004.
6. Scuola Estiva di Geometrie combinatorie Giuseppe Tallini, Potenza 1-6 Settembre 2003.

## 8 Ulteriori informazioni

- Referee per la rivista "Annals of Pure and Applied Logic".
- Componente dell'unità di Padova del P.R.I.N. "Topologia costruttiva: teoria, fondazioni, applicazioni" relativo all'anno 2008.
- Componente del gruppo di ricerca per il programma "Formalizzazione nel theorem prover interattivo Matita di risultati di topologia formale" finanziato dall'Ateneo di Padova (2007).
- Componente dell'unità di Palermo del P.R.I.N. "Strutture Geometriche, Combinatoria e loro Applicazioni" per il biennio 2003-2004.
- Socio dell'Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni (AILA).
- Membro del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche, Geometriche e le loro Applicazioni (GNSAGA) del Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi" (INDAM).

## 9 Attività di ricerca

Ho iniziato a fare ricerca in Logica in concomitanza con l'inizio del dottorato di ricerca. Sin dal principio, il mio supervisore scientifico è stato il Prof. Giovanni Sambin, ordinario di Logica Matematica dell'Università di Padova.

La maggior parte delle mie ricerche si possono far rientrare nell'area della matematica costruttiva (nel senso di predicativa e intuizionisticamente valida). In particolare, mi occupo di Topologia Formale (un approccio costruttivo alla topologia) e di algebra intuizionista (overlap algebre). Inoltre sono interessato alle applicazioni di tali teorie alla semantica della logica intuizionista del primo ordine.

### Algebra

La mia prima esperienza di ricerca, quella relativa alla tesi di laurea, è anche l'unica non collegata alla Logica. Mi sono occupato, infatti, di gruppi imprimitivi (o, meglio, di azioni imprimitive di un gruppo). Un'azione di gruppo è imprimitiva se l'insieme su cui agisce il gruppo può essere ripartito in "blocchi" che vengono permutati dall'azione del gruppo. Nella tesi di laurea e poi nell'articolo "**A class of imprimitive groups**", insieme al mio relatore Prof. Claudio G. Bartolone, ho classificato tutti i gruppi imprimitivi con specifiche condizioni sui blocchi. Questo lavoro è, pertanto, un contributo alla soluzione del problema più ampio, tutt'ora aperto, della classificazione di tutti i gruppi imprimitivi.

### Topologia costruttiva

Durante gli anni del dottorato ho trascorso diversi periodi presso il Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata dell'Università di Padova. Fra l'altro, ho tenuto un seminario sulle topologie formali finitarie. Risale a quel periodo (2004-2005) la stesura dei due articoli "**Finitary formal topologies and Stone's representation theorem**" e "**Finiteness in a minimalist foundation**", entrambi in collaborazione con il Prof. Sambin. Il primo di tali articoli studia la nozione di topologia formale finitaria e il suo legame con il teorema di rappresentazione di Stone per reticoli distributivi. Si mostra che la prima è uno strumento naturale per ottenere una versione costruttiva del secondo. Risultati di questo tipo erano noti a proposito della nozione di topologia formale introdotta in G. Sambin, *Intuitionistic formal spaces* (1987). Il nostro contributo è consistito nell'adattarli alla nuova e più generale definizione data nel libro: G. Sambin, *The basic picture*, Oxford U. P. (in via di pubblicazione). È da notare che i nostri risultati generalizzano i precedenti anche da un punto di vista fondatazionale; infatti, le definizioni che usiamo e i nostri argomenti possono essere formalizzati nella teoria dei tipi minimale (mTT) introdotta da Maria Emilia Maietti e Sambin nell'articolo *Toward a Minimalist Foundation for Constructive Mathematics*. Tale teoria è compatibile sia con la teoria dei tipi di Martin-Löf che con la teoria dei topoi (oltre che con ZFC); queste teorie possono essere

viste come estensioni di mTT. Collegato al lavoro precedente, è sorto, quindi, il problema di studiare il comportamento della nozione di insieme finito all'interno della teoria minimale. Pertanto, nel secondo articolo abbiamo proposto una formalizzazione del concetto di finito in mTT e ne abbiamo studiato le proprietà fondamentali, confrontandole con quelle di altre possibili definizioni.

La mia ricerca in topologia costruttiva si è intrecciata con i temi più propriamente proof-teoretici trattati nella mia tesi di dottorato (si veda la prossima sezione) ed è poi proseguita in lavori più recenti come, per esempio, “**A Galois connection between closure and interiors operator**”. In questo articolo studiamo in dettaglio i legami fra operatori di chiusura e operatori di interno da un punto di vista intuizionista. In particolare, siamo interessati a determinare se e in che modo un operatore di chiusura può determinare un operatore di riduzione e viceversa. Classicamente, la situazione è molto semplice per via della negazione: dato un operatore di chiusura, il complemento della chiusura del complementare di un insieme definisce un operatore di interno. Similmente se si parte da un operatore di interno. Intuizionisticamente, il quadro è molto più complesso. Noi descriviamo un modo per costruire il massimo interno associato ad una chiusura e viceversa. Queste costruzioni, a differenza di quanto accade classicamente, non sono una l'inversa dell'altra, bensì danno vita ad una struttura più articolata: una connessione di Galois. La motivazione per tale lavoro, ovviamente, viene dalla topologia formale: un operatore di chiusura corrisponde infatti ad una relazione di copertura (cover), mentre un operatore di interno è essenzialmente la stessa cosa di un predicato di positività binario (positivity relation).

Fra i lavori più recenti, vi è anche “**Convergence in Formal Topology**”, scritto in collaborazione anche con Maria Emilia Maietti, ricercatrice dell'Università di Padova, in cui si studiano le diverse nozioni di convergenza (le possibili versioni formali della richiesta di chiusura degli aperti di uno spazio topologico rispetto ad intersezioni finite) proposte nell'ambito della teoria delle topologie formali. Si propone una generalizzazione comune di tali diverse nozioni e se ne dà un'interpretazione categoriale. La nuova nozione introdotta risulta, infatti, strettamente collegata al concetto di co-monoide sopra una categoria.

## Teoria della dimostrazione intuizionista

A partire dal 2005 e per tutto il 2006 la mia ricerca si è concentrata su quello che doveva diventare l'argomento della mia **tesi di dottorato**: uno studio sia sintattico che semantico delle nozioni di non-derivabilità e di soddisfacibilità per la logica intuizionistica del primo ordine (vedi l'estratto “**Soddisfacibilità costruttiva**” pubblicato sulla rivista UMI La Matematica nella Società e nella Cultura). Il tutto è stato sviluppato in maniera costruttiva, applicando strumenti di topologia formale. Da questa esperienza sono scaturiti diversi articoli che riprendono ed approfondiscono le varie parti della tesi. Il primo di tali articoli, in ordine di tempo, è “**A constructive semantics for non-deducibility**”, pubblicato dal Mathematical Logic Quarterly in un volume dedicato agli articoli presentati al workshop “*Trends in Constructive Mathematics*” del 2006. In

tale articolo, studio la nozione logica di non-derivabilità mostrandone lo stretto legame con la relazione (binaria) di positività introdotta da Sambin nel suo libro. Tale relazione di positività, insieme al concetto di overlap algebra (vedi ancora il libro “*The Basic Picture*”), gioca un ruolo fondamentale anche nel mio articolo “**A constructive investigation of satisfiability**”, accettato per il volume degli *Annals of Pure and Applied Logic* dedicato al “*Third Workshop on Formal Topology*”. Questo è il lavoro che raccoglie il cuore delle mie ricerche durante il dottorato e al quale si può applicare il commento che Peter Schuster, in qualità di referee della mia tesi, ha formulato: “*With Ciraulo’s thesis it is notably one of the first times that any of these relatively recent proposals [positività binaria e overlap algebre] is put into practical use.*”. Infatti, in tale articolo, propongo un calcolo logico “co-induttivo” inteso a formalizzare in modo positivo la nozione di soddisfacibilità per una formula predicativa. Da un punto di vista semantico, tale calcolo è modellato tramite le overlap algebre, che sono una versione algebrica, ma costruttiva, dell’insieme delle parti di un insieme. Inoltre, il modello universale, o sintattico, è costruito adoperando in maniera essenziale la teoria delle topologie formali e, in particolare, il predicato di positività binario, con il conseguente uso di metodi coinduttivi.

Un’applicazione dei risultati descritti sopra si ritrova in “**Tense logic within a constructive metatheory**” nel quale il Prof. Sambin ed io mostriamo come utilizzare il calcolo della soddisfacibilità introdotto prima per ottenere risultati costruttivi di completezza per versioni intuizionistiche di logiche temporali.

## Algebra intuizionista

Recentemente, il mio interesse si è andato concentrando sullo studio delle overlap algebre. Tali strutture algebriche avevano già trovato applicazione nei risultati della mia tesi e degli articoli ad essa collegati. La definizione di overlap algebra è una descrizione algebrica delle proprietà della collezione delle parti di un insieme dal punto di vista di una fondazione costruttiva. In altre parole, una overlap algebra è una versione predicativa della nozione di algebra di Boole completa (vedi il mio articolo “**Sull’algebra degli insiemi in matematica intuizionista**”). In “**The overlap algebra of regular opens**”, pubblicato sul *Journal of Pure and Applied Algebra* di nuovo insieme a Sambin, dimostriamo come il linguaggio delle overlap algebre sia abbastanza espressivo da permettere la definizione e lo studio di gran parte dei concetti topologici. In questo lavoro, ci concentriamo sul concetto di aperto regolare e di spazio regolare, mostrando come tali nozioni possano essere trattate tramite le overlap algebre in una maniera elegante e del tutto costruttiva. In particolare, si riesce ad evitare l’uso del complemento riuscendo ugualmente a caratterizzare il legame fra l’operatore di chiusura e quello di interno in uno spazio topologico. Il risultato principale dell’articolo è che gli aperti regolari di uno spazio regolare formano una overlap algebra che, in generale, è priva di atomi. Nell’articolo “**Regular opens in formal topology and a representation theorem for overlap algebras**” (accettato per la pubblicazione presso gli *Annals of Pure and Applied Logic*) ho

mostrato che il risultato principale dell'articolo precedente vale anche nell'ambito della topologia formale. In più, ne ho provato anche il viceversa: gli aperti regolari di una topologia formale formano una overlap algebra e ogni overlap algebra (purché ammetta un insieme di generatori) può essere rappresentata in questo modo. Nell'articolo "**Constructive version of Boolean algebra**", insieme a M. E. Maietti e Paola Toto, abbiamo intrapreso lo studio di strutture algebriche dotate di una qualche relazione di overlap, ma meno ricche rispetto alle overlap algebre. In particolare, ci siamo concentrati su strutture d'ordine non complete, ma dotate di una relazione di overlap con opportune proprietà. Abbiamo mostrato che, da un punto di vista classico, tali strutture sono esattamente algebre di Boole. Intuizionisticamente, invece, si trovano esempi di strutture naturalmente dotate di una relazione di overlap, ma che non sono algebre di Boole. Ad esempio, è ben noto che mettendo assieme i sottoinsiemi finiti e cofiniti di un certo insieme si ottiene un'algebra di Boole. Questo non è più vero intuizionisticamente. D'altro canto, noi mostriamo che essi sono un esempio di ordine parziale con overlap.

## 9.1 Ricerca in corso e progetti

Attualmente continuo ad interessarmi di strutture algebriche con overlap e dei loro legami con la topologia formale. L'obiettivo è, fra l'altro, quello di provare opportune versioni costruttive di risultati classici sulle algebre di Boole, sui reticoli e sulle strutture ordinate in generale. Ad esempio, insieme alla Dott.ssa M. E. Maietti, sto studiando una versione per strutture con overlap della costruzione nota come *completamento di Dedekind-MacNeille*. I primi risultati sembrano mostrare che tale versione "overlap" del completamento si comporta meglio costruttivamente, per esempio rispetto alla generazione induttiva.

Un altro progetto per il futuro, in collaborazione con la Dott.ssa Olivia Caramello dell'Università di Cambridge, è quello di sviluppare la teoria dei topos di Grothendieck in modo predicativo e intuizionista. Lo scopo è quello di estendere alla nozione di topos, inteso come spazio topologico generalizzato, le simmetrie e dualità scoperte da Sambin nell'ambito della topologia costruttiva.