7 Esercizi di ripasso

Esercizio 1 Si consideri il linguaggio definito dalla seguente sintassi:

$$
\begin{array}{rcll}
\textit{Termini}\ M,N & ::= & x & \text{variabili}\\
& \mid & n \mid \mathsf{true} \mid \mathsf{false} & \text{costanti intere e booleane}\\
& \mid & M+M & \text{operazioni intere}\\
& \mid & \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ M\ \mathsf{else}\ M & \text{condizionale}\\
& \mid & \mathsf{fn}\ x{:}T.M & \text{dichiarazione di funzione}\\
& \mid & MM & \text{applicazione di funzione}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\textit{Valori}\ v & ::= & n \mid \mathsf{true} \mid \mathsf{false} \mid \mathsf{fn}\ x{:}T.M\\
\textit{Tipi}\ T & ::= & \mathsf{Bool} \mid \mathsf{Nat} \mid T \to T
\end{array}
$$

La semantica operazionale è definita dalle seguenti regole:

$$
\text{(SUM)}\ \frac{n \text{ è la somma degli interi } n_1 \text{ e } n_2}{n_1 + n_2 \longrightarrow n}
\qquad
\text{(SUM LEFT)}\ \frac{M \longrightarrow M'}{M + N \longrightarrow M' + N}
\qquad
\text{(SUM RIGHT)}\ \frac{M \longrightarrow M'}{v + M \longrightarrow v + M'}
$$

$$
\text{(IF-TRUE 1)}\ \frac{}{\mathsf{if\ true\ then}\ M\ \mathsf{else}\ N \longrightarrow M}
\qquad
\text{(IF-FALSE 1)}\ \frac{}{\mathsf{if\ false\ then}\ M\ \mathsf{else}\ N \longrightarrow N}
$$

$$
\text{(IF-TRUE 2)}\ \frac{n \text{ è diverso da } 0}{\mathsf{if}\ n\ \mathsf{then}\ M\ \mathsf{else}\ N \longrightarrow M}
\qquad
\text{(IF-FALSE 2)}\ \frac{}{\mathsf{if}\ 0\ \mathsf{then}\ M\ \mathsf{else}\ N \longrightarrow N}
$$

$$
\text{(IF)}\ \frac{M_1 \longrightarrow M_1'}{\mathsf{if}\ M_1\ \mathsf{then}\ M_2\ \mathsf{else}\ M_3 \longrightarrow \mathsf{if}\ M_1'\ \mathsf{then}\ M_2\ \mathsf{else}\ M_3}
$$

$$
\text{(BETA)}\ \frac{}{(\mathsf{fn}\ x.M)\ v \longrightarrow M\{x := v\}}
\qquad
\text{(APP 1)}\ \frac{M \longrightarrow M'}{MN \longrightarrow M'N}
\qquad
\text{(APP 2)}\ \frac{M \longrightarrow M'}{vM \longrightarrow vM'}
$$

Si consideri inoltre per questo linguaggio un sistema di tipi con subtyping definito dalle regole seguenti:

$$
\text{(REFLEX)}\ \frac{}{T <: T}
\qquad
\text{(TRANS)}\ \frac{S <: U \quad U <: T}{S <: T}
\qquad
\text{(NATBOOL)}\ \frac{}{\mathsf{Nat} <: \mathsf{Bool}}
\qquad
\text{(ARROW)}\ \frac{T_1 <: S_1 \quad S_2 <: T_2}{S_1 \to S_2\ <:\ T_1 \to T_2}
$$

$$\frac{(\textsc{True})}{\Gamma \vdash \mathsf{true} : \mathsf{Bool}} \qquad \frac{(\textsc{False})}{\Gamma \vdash \mathsf{false} : \mathsf{Bool}} \qquad \frac{(\textsc{Nat})}{\Gamma \vdash n : \mathsf{Nat}} \qquad (\textsc{Var})\ \frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T}$$

$$(\textsc{Sum})\ \frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat} \quad \Gamma \vdash N : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash M + N : \mathsf{Nat}} \qquad (\textsc{IfThenElse})\ \frac{\Gamma \vdash M_1 : \mathsf{Bool} \quad \Gamma \vdash M_2 : T \quad \Gamma \vdash M_3 : T}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M_1\ \mathsf{then}\ M_2\ \mathsf{else}\ M_3 : T}$$

$$(\textsc{Fun})\ \frac{\Gamma, x : T_1 \vdash M : T_2}{\Gamma \vdash \mathsf{fn}\, x{:}T_1.M : T_1 \to T_2} \qquad (\textsc{App})\ \frac{\Gamma \vdash M : T_1 \to T_2 \quad \Gamma \vdash N : T_1}{\Gamma \vdash M\ N : T_2} \qquad (\textsc{Subsumption})\ \frac{\Gamma \vdash M : S \quad S <: T}{\Gamma \vdash M : T}$$

(A) Per ognuno dei seguenti termini si chiede di

1. Descrivere la semantica operazionale del termine. Si chiede di indicare tutti i singoli passi di valutazione del termine, esibendo la derivazione di tali passi solo per il primo termine M_1.
2. Dire se il termine è ben tipato. In caso affermativo esibire **tutte** le derivazioni di tipo per il termine. In in caso negativo, dimostrare che una derivazione di tipo non esiste.

- $M_1 = \mathsf{if}\ ((\mathsf{fn}\, x{:}\mathsf{Nat}.\, 3{+}x)\ \ 2)\ \ \mathsf{then\ true\ else\ false}$
- $M_2 = (\mathsf{fn}\, x{:}\mathsf{Bool}.\ \mathsf{if}\ x\, \mathsf{then}\ (\mathsf{fn}\, y{:}\mathsf{Bool}.y\ \ x)\ \mathsf{else\ false})\ \ (5+4)$
- $M_3 = (\mathsf{fn}\, x{:}\mathsf{Bool}.\ \mathsf{if}\ x+2\, \mathsf{then}\ (\mathsf{fn}\, y{:}\mathsf{Bool}.y\ \ x)\ \mathsf{else\ false})\ \ (5+4)$

(B) Enunciare e dimostrare i lemmi di inversione per questo linguaggio.

(C) Torvare due termini M e N del linguaggio che stiamo considerando, tali che $M \longrightarrow N$, $\Gamma \vdash M : T$, $\Gamma \vdash N : S$ con $S <: T$ e $T \not<: S$. Cioè esibire un caso in cui il tipo di un termine decresce durante la computazione. **Spiegare inoltre perché non si tratta di un controesempio al teorema di preservazione dei tipi.**

Esercizio 2 Si consideri il linguaggio funzionale definito dalle seguente sintassi e semantica operazionale call-by-name:

$$\begin{array}{rcl} \textit{Termini}\ M & ::= & x \mid n \mid \mathsf{fn}\, x{:}T.M \mid M\, M \mid \mathsf{error} \\ \textit{Valori}\ v & ::= & \mathsf{fn}\, x{:}T.M \mid x \\ \textit{Tipi}\ T & ::= & \mathsf{Nat} \mid T \to T \end{array}$$

$$(\textsc{Comp})\ \frac{}{(\mathsf{fn}\, x.M)\ N \longrightarrow M\{x := N\}} \qquad (\textsc{App})\ \frac{M \longrightarrow M'}{MN \longrightarrow M'N} \qquad (\textsc{Raise Err})\ \frac{}{n\, M \longrightarrow \mathsf{error}} \qquad (\textsc{Err Ctx})\ \frac{}{\mathsf{error}\ M \longrightarrow \mathsf{error}}$$

Si consideri il seguente sistema di tipi, in cui in particolare non c'è alcuna regola di tipo per il termine error:

$$\frac{(\textsc{Nat})}{\Gamma \vdash n : \mathsf{Nat}} \qquad (\textsc{Var})\ \frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T} \qquad (\textsc{Fun})\ \frac{\Gamma, x : T_1 \vdash M : T_2}{\Gamma \vdash \mathsf{fn}\, x{:}T_1.M : T_1 \to T_2} \qquad (\textsc{App})\ \frac{\Gamma \vdash M : T_1 \to T_2 \quad \Gamma \vdash N : T_1}{\Gamma \vdash M\ N : T_2}$$

Enunciare e dimostrare un teorema di Safety adatto per questo linguaggio. La dimostrazione deve usare i teoremi di Progressione e Preservazione, che vanno però precisamente enunciati.