SOLUZIONI DI VISCOSITÀ DI EQUAZIONI NONLINEARI ELLITTICHE DEGENERI*

Martino Bardi, Sandra Bottacin, Francesca Da Lio

Dipartimento di Matematica P. e A., Università di Padova,
via Belzoni 7, I-35131 Padova, Italy.
e-mail: bardi@math.unipd.it; sbottaci@math.unipd.it; dalio@math.unipd.it

Abstract. This is a self-contained introduction to the theory of viscosity solutions for second order, fully nonlinear, degenerate elliptic equations. We present in detail a simple proof of the comparison theorem between semicontinuous sub- and supersolutions. Then we study the Dirichlet problem by the Perron-Wiener method and discuss some properties of the generalized (envelope) solutions. Finally we prove the Strong Maximum Principle by means of a Hopf Boundary Lemma, under a mild nondegeneracy assumption.

0. Introduzione

Questo articolo è un'introduzione autosufficiente alla teoria delle soluzioni di viscosità per equazioni alle derivate parziali del secondo ordine completamente nonlineari ed ellittiche degeneri, o ellittico-paraboliche, in un senso abbastanza ampio da comprendere le equazioni del primo ordine di tipo Hamilton-Jacobi come caso particolare.

La teoria delle soluzioni di viscosità nasce nella prima metà degli anni ottanta a partire dai lavori di M.G. Crandall, P.L. Lions, L.C. Evans e poi di I. Ishii, I. Capuzzo Dolcetta e molti altri, che hanno come argomento centrale le equazioni di Hamilton-Jacobi e le loro applicazioni al controllo ottimo e ai giochi differenziali. Nello stesso periodo P.L. Lions [L] estende la teoria alle equazioni

* Lavoro svolto nell'ambito del progetto M.U.R.S.T. "Problemi nonlineari nell'analisi e nelle applicazioni fisiche, chimiche, biologiche".

del secondo ordine di tipo Hamilton-Jacobi-Bellman usando in modo essenziale metodi di controllo stocastico, e solo qualche anno dopo R. Jensen [J1] dimostra il primo teorema di confronto e unicità per equazioni del secondo ordine con metodi analitici. Successivamente questo risultato viene esteso e migliorato da vari autori e costituisce il caposaldo attorno al quale si sviluppa tutta la teoria. Un'eccellente panoramica sintetica dei metodi e dei risultati principali della teoria è l'articolo di rassegna [CIL], mentre il volume [BCESS] dà un resoconto più recente dello stato dell'arte e delle numerose applicazioni a campi diversi. Vari libri recenti approfondiscono alcuni aspetti della teoria: [FS] le applicazioni al controllo stocastico, [CC] la regolarità delle soluzioni per equazioni uniformemente ellittiche, [Ba] e [BCD] le equazioni del primo ordine e le applicazioni al controllo deterministico.

Nella Sezione 1 diamo due definizioni equivalenti di soluzione di viscosità e spieghiamo il collegamento con le soluzioni classiche. Nella Sezione 2 introduciamo la convoluzione nonlineare, o inf-sup-convoluzione, che è uno degli strumenti principali della teoria e viene usato più volte nel seguito. La Sezione 3 è dedicata a una dimostrazione completa del principio di confronto tra sopra- e sottosoluzioni semicontinue, che usa due soli strumenti non elementari, entrambi di teoria della misura: la formula dell'area e il Teorema di Alexandrov sulla derivabilità delle funzioni convesse. Il taglio di questa sezione è didattico e privilegia la semplicità rispetto alla generalità; la dimostrazione che presentiamo è ispirata a quella in [JLS].

La Sezione 4 tratta il problema di Dirichlet in aperti limitati generali (cioè senza alcuna ipotesi di regolarità). Qui seguiamo il metodo di Perron, esteso alle soluzioni di viscosità da Ishii [I], e presentiamo un risultato di esistenza di una soluzione generalizzata alla Wiener [W], [H], preso dal nostro recente lavoro [BB2] e collegato alle *soluzioni inviluppo* introdotte in [BCD] e [BB1]. Nella Sezione 5, anch'essa tratta da [BB2], diamo un risultato di regolarità al bordo e proviamo la dipendenza continua dai dati della soluzione generalizzata del problema di Dirichlet.

Infine nella Sezione 6 proviamo un Boundary Lemma di tipo Hopf e un Principio di Massimo Forte per sottosoluzioni semicontinue di equazioni strettamente ellittiche (in un senso piuttosto debole); questi risultati sono tratti da [BDL] dove si studia anche l'insieme di propagazione dei massimi per equazioni di Hamilton-Jacobi-Bellman degeneri. Per altre dimostrazioni del Principio di Massimo Forte sotto ipotesi diverse si vedano [CC], [KK] e le loro bibliografie.

1. Definizioni e prime proprietà

Studieremo equazioni del tipo

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{1.1}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e limitato, dove Du e D^2u denotano il gradiente e la matrice Hessiana di u, $F : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times S(N) \to \mathbb{R}$ è continua, $S(N)$ è l'insieme delle matrici simmetriche di ordine N, per F che soddisfa la seguente proprietà di monotonia.

Definizione 1.1. Diremo che F è *propria* se è non crescente in D^2u (=*ellittica degenere*) e non decrescente in u, cioè

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, Y)$$

per ogni x, p e $r \leq s,\ Y \leq X$.

Notazione: Date due matrici X, Y scriveremo $Y \leq X$ intendendo che la matrice $X - Y$ è semidefinita positiva.

Esempi:

- Equazioni del 1^o ordine: $H(x, u, Du) = 0$, con H continua e non decrescente in u;
- $-\Delta u + f(x, u, Du) = 0$, con f continua e non decrescente in u;
- $-a_{ij}u_{x_ix_j} + f = 0$, con a_{ij} funzioni continue di x e Du, la matrice $(a_{ij}) \geq 0$ e f come sopra;
- $-\Delta_m u + f = 0$, con f come sopra e Δ_m l'm-Laplaciano con $m \geq 2$, cioè

  $$\Delta_m u := \mathrm{div}(|Du|^{m-2}Du) = |Du|^{m-2}\mathrm{Trace}D^2u + (m-2)|Du|^{m-4}Du\cdot D^2uDu;$$

- $-\Delta_\infty u + f = 0$, con f come sopra e Δ_∞ l'∞-Laplaciano, cioè

  $$\Delta_\infty u = Du \cdot D^2uDu = u_{x_i}u_{x_j}u_{x_ix_j};$$

- $u_t + G(x, t, u, D_xu, D_x^2u) = 0 \quad$ in $\Omega \times (0, T)$, se G è propria in Ω;
- $\max_\alpha \min_\beta$ o $\min_\beta \max_\alpha$ di famiglie di operatori $F^{\alpha,\beta}$ propri.

Motivazione della definizione di soluzione di viscosità

Supponiamo $u \in C^2(\Omega)$, $F(x, u, Du, D^2u) \leq 0$ (risp. ≥ 0) in Ω. Siano $\varphi \in C^2(\Omega)$ e x_0 punto di massimo (risp. di minimo) locale per $u - \varphi$. Allora $Du = D\varphi$ e $D^2u \leq D^2\varphi$ (risp. $\geq$) in x_0. Quindi, per l'ellitticità degenere,

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) \leq 0,$$

(risp. $F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) \geq 0$).

Definizione 1.2. Una funzione u semicontinua superiormente in Ω è *sottosoluzione di viscosità* di (1.1) se $\forall \phi \in C^2(\Omega)$ e per ogni punto $x_0 \in \Omega$ di massimo locale per $u - \phi$ si ha

$$F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0.$$

Una funzione u semicontinua inferiormente è *soprasoluzione di viscosità* di (1.1) se $\forall \phi \in C^2(\Omega)$ e per ogni punto $x_0 \in \Omega$ di minimo relativo per $u - \phi$ si ha

$$F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq 0.$$

Infine $u \in C(\Omega)$ è soluzione di viscosità di (1.1) se è sotto e soprasoluzione.

Osservazione 1.1. (Coerenza 1) La motivazione della definizione ci dice che se u è soluzione classica di (1.1) e F è ellittica degenere allora u è soluzione di viscosità.

Notazione: $USC(\Omega)$ (risp. $LSC(\Omega)$) denota l'insieme delle funzioni $\Omega \to \mathbb{R}$ semicontinue superiormente (risp. inferiormente), $BUSC(\Omega)$ (risp. $BLSC(\Omega)$) il sottoinsieme delle limitate.

La definizione di soluzione di viscosità "porta dentro sè" il Principio di Massimo e il Principio di Confronto per le equazioni ellittiche. Infatti vale la seguente

Proposizione 1.1. *Se F è nondecrescente in u, allora*

(i) u sottosoluzione di viscosità di (1.1) se e solo se per ogni palla $B \subseteq \Omega$ e per ogni $\varphi \in C^2(B)$ tale che

$$F(x, \varphi, D\varphi, D^2\varphi) > 0 \text{ in } B, \text{ e } u \leq \varphi \text{ su } \partial B,$$

si ha $u \leq \varphi$ in B, cioè vale il Principio di Confronto con le soprasoluzioni classiche strette per il problema di Dirichlet in ogni palla.

(ii) u soprasoluzione di viscosità di (1.1) *se e solo se vale il Principio di Confronto con le sottosoluzioni classiche strette per il problema di Dirichlet in ogni palla.*

Dimostrazione. La lasciamo come esercizio, col suggerimento di verificare innanzitutto che nella Definizione 1.2 di sottosoluzione di viscosità è equivalente considerare solo i punti x_0 di massimo locale stretto. □

Ora daremo una definizione equivalente di sotto e soprasoluzione di viscosità che usa, anzichè le funzioni test, i semigetti superiore e inferiore di ordine 2, definiti come segue.

Definizione 1.3. Diciamo che $(p, X) \in J^{2,+}u(x_0)$ (risp. $J^{2,-}u(x_0)$) se

$$\begin{aligned} u(x) \leq u(x_0) + p \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T X(x - x_0) \\ + o(|x - x_0|^2), \quad \text{per } x \to x_0; \text{ (risp. } \geq). \end{aligned}$$

Esempio: Se $\varphi \in C^2$ e $u - \varphi$ ha max in x_0, allora in un opportuno intorno di x_0 si ha

$$\begin{aligned} u(x) &\leq u(x_0) + \varphi(x) - \varphi(x_0) \\ &= u(x_0) + D\varphi(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T D^2\varphi(x_0)(x - x_0) \\ &+ o(|x - x_0|^2), \quad \text{per } x \to x_0. \end{aligned}$$

Quindi $(D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \in J^{2,+}u(x_0)$. □

Si può dimostrare (lo lasciamo come esercizio) che ogni elemento di $J^{2,+}u$ è del tipo descritto nell'esempio cioè vale il seguente

Lemma 1.1. *Sia* $u \in USC(\Omega)$, *allora*

$$J^{2,+}u(x_0) = \{(D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) : \ \varphi \in C^2, \ x_0 \text{ max loc. per } u - \varphi\}.$$

Corollario 1.1. $u \in USC(\Omega)$ *(risp.* $u \in LSC(\Omega)$*) è sottosoluzione di viscosità (risp. soprasoluzione) se e solo se per ogni* $(p, X) \in J^{2,+}u(x)$ *(risp.* $J^{2,-}u(x)$*) si ha*

$$F(x, u(x), p, X) \leq 0 \ \ \text{(risp. } \geq 0).$$

Definizione 1.4. Diciamo che u *è due volte differenziabile in* $x_0 \in \Omega$ se esistono $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times S(N)$:

$$\begin{aligned} u(x) = u(x_0) + p \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T X(x - x_0) \\ + o(|x - x_0|^2), \quad \text{per } x \to x_0. \end{aligned}$$

In tal caso si vede facilmente che $p = Du(x_0)$ e che, se esistono le derivate seconde di u in x_0, allora $X = D^2u(x_0)$, quindi denoteremo in ogni caso la matrice X con $D^2u(x_0)$.

Proposizione 1.2. (Coerenza 2) *Sia* u *soluzione di viscosità di* (1.1), *due volte differenziabile in* x_0, *allora*

$$F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) = 0.$$

Dimostrazione. Basta osservare che in x_0 vale l'inclusione

$$(Du(x_0), D^2u(x_0)) \in J^{2,+}u(x_0) \cap J^{2,-}u(x_0). \qquad \square$$

2. La convoluzione nonlineare

In questa sezione introduciamo uno strumento essenziale nella teoria delle soluzioni di viscosità, che useremo per dimostrare sia il Teorema di Confronto nella Sezione 3, sia il Principio di Massimo Forte nella Sezione 6.

Definizione 2.1. Sia $u: \Omega \to \mathbb{R}^N$ limitata e $\varepsilon > 0$. L'*inf-convoluzione* e la *sup-convoluzione* di u sono definite rispettivamente da

$$u_\varepsilon(x) = \inf\{u(y) + \frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2 : \ y \in \Omega\}, \tag{2.1}$$

$$u^\varepsilon(x) = \sup\{u(y) - \frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2 : \ y \in \Omega\}. \tag{2.2}$$

Definizione 2.2. Diciamo che u è *semiconcava* (risp. *semiconvessa*) in Ω se esiste $C > 0 : u - C|x|^2$ è concava (risp. $u + C|x|^2$ è convessa).

Proposizione 2.1. *Sia $u \in BLSC(\Omega)$ (risp. $BUSC(\Omega)$). Allora:*

(i) u_ε è semiconcava (risp. u^ε è semiconvessa) in Ω;

(ii) $\forall \varepsilon < \dfrac{(dist(x,\partial\Omega))^2}{4||u||_\infty}$

$$u_\varepsilon = \min\{u(y) + \frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2 : \ y \in B(x, 2\sqrt{\varepsilon||u||_\infty})\},$$

$$(\textit{risp. } u^\varepsilon = \max\{u(y) - \frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2 : \ y \in B(x, 2\sqrt{\varepsilon||u||_\infty})\});$$

(iii) $u_\varepsilon \uparrow u$ (risp. $u^\varepsilon \downarrow u$), per $\varepsilon \to 0$;

(iv) se $u \in UC(\Omega)$, allora

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon - u| = 0, \quad (\textit{risp. } |u^\varepsilon - u|),$$

dove $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \ dist^2(x,\partial\Omega) > 4\varepsilon||u||_\infty\}$.

Dimostrazione. (i) È un esercizio non difficile, si veda ad esempio il Lemma II.4.11 in [BCD].

(ii) Sia $\varepsilon < \dfrac{(dist(x,\partial\Omega))^2}{4||u||_\infty}$, allora $\overline{B_\varepsilon} := \overline{B}(x, 2\sqrt{\varepsilon||u||_\infty}) \subseteq \Omega$.

Si ha che $y \in \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$ se e solo se $|x-y|^2 > 4\varepsilon||u||_\infty$ e questo implica

$$u(y) + \frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2 > ||u||_\infty.$$

Ma $u_\varepsilon(x) \le u(x) \le ||u||_\infty$ e quindi

$$u_\varepsilon(x) = \min\{u(y) + \frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2 : \ y \in \overline{B_\varepsilon}\}.$$

(iii) u_ε è una rete nondecrescente e $\limsup_\varepsilon u_\varepsilon(x) \le u(x)$. D'altra parte essendo $u_\varepsilon(x) \ge u(y_\varepsilon)$, con $y_\varepsilon \in \overline{B_\varepsilon}$ e $u \in LSC(\Omega)$, si ha

$$\liminf_\varepsilon u_\varepsilon(x) \ge \liminf_\varepsilon u(y_\varepsilon) \ge u(x).$$

Quindi

$$\lim_\varepsilon u_\varepsilon(x) = u(x).$$

(iv) Se $x \in \Omega_\varepsilon$ detto y_ε il punto di minimo in (2.1) si ha

$$\begin{aligned} 0 &\le u(x) - u_\varepsilon(x) = u(x) - u(y_\varepsilon) \\ &\le \omega_u(|x-y_\varepsilon|) \le \omega_u(2\sqrt{\varepsilon||u||_\infty}), \end{aligned}$$

dove ω_u è il modulo di continuità di u in $\overline{B_\varepsilon}$. Quindi

$$\max_{\overline{\Omega_\varepsilon}} |u_\varepsilon - u| \le \omega_u(2\sqrt{\varepsilon||u||_\infty}) \to 0 \quad \text{per } \varepsilon \to 0. \quad \square$$

Ricordiamo ora l'importante Teorema di Alexandrov sulla regolarità delle funzioni convesse, che si applica ovviamente anche alle funzioni semiconvesse e semiconcave, quali la sup- e l'inf-convoluzione.

Teorema 2.1. (di Alexandrov) *Sia $f : \mathbb{R}^N \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ convessa, Ω aperto. Allora f è due volte differenziabile in quasi ogni $x \in \Omega$ (vedi Def.1.4).*

Per la dimostrazione si veda ad esempio [EG].

3. Il Principio di Confronto

In questa sezione diamo la dimostrazione completa di un teorema di confronto tra sotto e soprasoluzioni di viscosità di equazioni non lineari ellittiche degeneri. Per questo risultato occorre che F sia *strettamente propria,* cioè strettamente monotona o rispetto a u o rispetto a D^2u, oltre ad essere abbastanza regolare.

Per semplicità consideriamo l'equazione

$$u + F(x, Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{3.1}$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è aperto limitato e $F\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times S(N) \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua ed ellittica degenere, cioè

$$F(x, p, X) \leq F(x, p, Y), \quad \text{se } X \geq Y.$$

Lemma 3.1. (Equazione approssimata per l'inf- e sup-convoluzione) *Sia $u \in BUSC(\overline{\Omega})$ sottosoluzione di viscosità (risp. $u \in BLSC(\overline{\Omega})$ soprasoluzione) di (3.1). Allora u_ε è soprasoluzione (risp. u^ε sottosoluzione) di viscosità di*

$$u + F(x, Du, D^2u) \geq -\rho(\varepsilon) \quad \text{in } \Omega_\varepsilon$$

(risp. $\leq \rho(\varepsilon)$), dove $\rho(\varepsilon) := \omega_x(2\sqrt{\varepsilon||u||_\infty})$ e ω_x è il modulo di continuità di F rispetto a x.

Dimostrazione. Siano $\varphi \in C^2(\Omega)$ e $\overline{x} \in \Omega$ punto di minimo per $u_\varepsilon - \varphi$. Si è visto che per ε sufficientemente piccolo

$$u_\varepsilon(\overline{x}) = \min\{u(y) + \frac{1}{2\varepsilon}|x - y|^2 : \ y \in B(\overline{x}, 2\sqrt{\varepsilon||u||_\infty})\}.$$

Sia quindi $y_\varepsilon \in B(\overline{x}, 2\sqrt{\varepsilon||u||_\infty})$ tale che

$$u_\varepsilon(\overline{x}) = u(y_\varepsilon) + \frac{1}{2\varepsilon}|x - y_\varepsilon|^2. \tag{3.2}$$

Tenendo conto che $u_\varepsilon - \varphi$ ha un minimo locale in $\overline{x}$, si verifica facilmente che la funzione

$$y \to u(y) - \varphi(\overline{x} - y_\varepsilon + y)$$

ha un minimo in y_ε. Quindi

$$\begin{aligned} 0 &\leq u(y_\varepsilon) + F(y_\varepsilon, D\varphi(\overline{x}), D^2\varphi(\overline{x})) \\ &\leq u(y_\varepsilon) + F(\overline{x}, D\varphi(\overline{x}), D^2\varphi(\overline{x})) + \omega_x(|y_\varepsilon - \overline{x}|). \end{aligned}$$

Poichè $|y_\varepsilon - \overline{x}| \leq 2\sqrt{\varepsilon||u||_\infty}$, usando (3.2) si conclude che

$$u_\varepsilon(\overline{x}) + F(\overline{x}, D\varphi(\overline{x}), D^2\varphi(\overline{x}) \geq -\omega_x(2\sqrt{\varepsilon||u||_\infty}). \quad \square$$

Lemma 3.2. **(Lemma di Jensen)** *Sia v semiconvessa in Ω. Se $\overline{x}$ è punto di massimo stretto locale, allora per ogni $r, \delta > 0$ sufficientemente piccoli l'insieme*

$$K := K_{r,\delta} := \{y \in B(\overline{x}, r) : \ \exists p, \ |p| \le \delta, \ v(y) + p \cdot y = \max_{x \in B(\overline{x}, r)} [v(x) + p \cdot x]\}$$

ha misura positiva.

Osservazione 3.1. $v(x) + p \cdot x$ ha max in y se e solo se $\forall x \in B(\overline{x}, r)$ $v(x) \le v(y) + p \cdot (y - x)$, cioè il grafico di v in $B(\overline{x}, r)$ sta sotto a un piano tangente nel punto $(y, v(y))$. Per questo motivo K si chiama *l'insieme di contatto superiore* di v. In particolare se $v \in C^2$, allora in K deve essere $p = Dv(y)$ e $D^2 v \le 0$. Se per esempio $D^2 v(\overline{x}) < 0$ allora K contiene un intorno di $\overline{x}$. Ricordiamo che l'insieme di contatto superiore è uno strumento importante della dimostrazione del classico Principio di Massimo di Alexandrov, Bakelman e Pucci (vedi, ad es., [GT]).

Prima di dimostrare il Lemma ricordiamo il seguente classico risultato di teoria geometrica della misura (vedi, ad es., [EG]).

Teorema 3.1. **(Formula dell'area)** *Se $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è Lipschitziana e $Jacf$ (che esiste q.o.) è simmetrica, allora per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile vale la seguente formula*

$$\int_A |\det Jacf| dx = \int_{\mathbb{R}^N} H^0(A \cap f^{-1}(y)) dy \tag{3.3}$$

dove H^0 indica la misura di Hausdorff di dimensione 0, cioè la misura che conta i punti.

Corollario 3.1. *Nelle ipotesi del teorema precedente vale la seguente relazione*

$$mis f(A) \le \int_A |\det Jacf| dx.$$

Dimostrazione. Si noti che

$$H^0(A \cap f^{-1}(y)) \begin{cases} = 0 & \text{se } y \notin f(A); \\ \ge 1 & \text{se } y \in f(A). \end{cases}$$

Quindi, per (3.3),

$$\int_A |\det Jacf| dx \ge \int_{f(A)} dy = mis f(A). \quad \square$$

Corollario 3.2. *Sia $v \in C^2$, $A \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile, allora*

$$mis Dv(A) \le \int_A |\det D^2 v(x)| dx.$$

Dimostrazione Lemma 3.2. Passo 1: Stima della misura di K nel caso in cui $v \in C^2$. Essendo $\overline{x}$ di massimo locale stretto, esistono $\gamma, r > 0$ tali che

$$v(\overline{x}) \geq \max_{\partial B(\overline{x},r)} v + \gamma.$$

Posto $\delta := \dfrac{\gamma}{2r}$, si vede che se $|p| < \delta$, allora la funzione $v_p(x) := v(x) + p \cdot x$ assume il massimo su $\overline{B}(\overline{x}, r)$ in un punto $y \in B(\overline{x}, r)$ quindi $y \in K$). Infatti per ogni $x \in \partial B(\overline{x}, r)$ si ha

$$\begin{aligned} v(\overline{x}) + p \cdot \overline{x} &\geq v(x) + \gamma + p \cdot (\overline{x} - x) + p \cdot x \\ &\geq v(x) + p \cdot x + \gamma - \delta r \\ &> v(x) + p \cdot x. \end{aligned}$$

Da ciò segue che $Dv_p(y) = Dv(y) + p = 0$ e quindi che

$$B(0, \delta) \subseteq Dv(K). \tag{3.4}$$

Ora sia $\lambda > 0$ tale che $v(x) + \dfrac{\lambda}{2}|x|^2$ è convessa, allora in K si ha

$$-\lambda I \leq D^2 v \leq 0.$$

Quindi in K gli autovalori di $D^2 v$ sono non positivi e $\geq -\lambda$, perciò $|\det D^2 v| \leq \lambda^N$. Allora per (3.4) ed il Corollario 3.2. si ha

$$\begin{aligned} misB(0, \delta) \leq misDv(K) &\leq \int_K |\det D^2 v(x)| dx \\ &\leq mis(K)\lambda^N, \end{aligned}$$

e quindi $mis(K) > \dfrac{misB(0, \delta)}{\lambda^N}$.

Passo 2: Approssimazione di v con $\omega_\varepsilon \in C^2$. Sia $\omega_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} v(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy$, dove ρ_ε è un mollificatore. Si dimostra che se $v + \dfrac{\lambda}{2}|x|^2$ è convessa allora anche $\omega_\varepsilon + \dfrac{\lambda}{2}|x|^2$ è convessa $\forall \varepsilon$ piccolo. Per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo

$$K^{(\varepsilon)} := \{y \in B(\overline{x}, r) : \ \exists p, \ |p| \leq \delta, \ \omega_\varepsilon(y) + p \cdot y = \max_{x \in B(\overline{x},r)} [\omega_\varepsilon(x) + p \cdot x]\}.$$

Facciamo vedere che

$$X := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} K^{(\frac{1}{m})} \subseteq K.$$

Infatti $y \in X$ se e solo se $\forall n,\ \exists m \geq n : y \in K^{(\frac{1}{m})}$, cioè $\exists |p_m| \leq \delta :\ \omega_{\frac{1}{m}}(x) + p_m \cdot x$ ha max in y. Esiste quindi $p_{m_k} \to \overline{p} \in \overline{B}(0,\delta)$ e da

$$\omega_{\frac{1}{m_k}}(x) + p_{m_k} \cdot x \leq \omega_{\frac{1}{m_k}}(y) + p_{m_k} \cdot y$$

segue che $v(x) + \overline{p} \cdot x \leq v(y) + \overline{p} \cdot y$ e quindi $y \in K$.

Verificheremo ora che $\exists \overline{n} :\ \forall m \geq \overline{n}$:

$$misK^{(\frac{1}{m})} \geq \frac{misB(0,\delta)}{\lambda^N} =: C, \tag{3.5}$$

con δ e λ indipendenti da m. Da ciò segue subito che $\forall n \geq \overline{n}$

$$mis\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} K^{(\frac{1}{m})}\right) \geq C$$

e quindi anche $misK \geq C$.

Verifica di (3.5): essendo $\overline{x}$ di massimo stretto per v, esistono $\gamma, r > 0$:

$$v(\overline{x}) \geq \max_{\partial B(\overline{x},r)} v + 2\gamma.$$

Poichè $\omega_{\frac{1}{m}}$ converge uniformemente a v, $\exists \overline{n}$ tale che $\forall m \geq \overline{n}$:

$$\omega_{\frac{1}{m}}(\overline{x}) \geq \max_{\partial B(\overline{x},r)} \omega_{\frac{1}{m}} + \gamma.$$

Per la stima fatta al Passo 1, se $|p| \leq \delta := \dfrac{\gamma}{2r}$, allora $\forall m \geq \overline{n}$ il max di $\omega_{\frac{1}{m}}(x) + p \cdot x$ in $\overline{B}(\overline{x}, r)$ è raggiunto all'interno. Da ciò segue che se m è sufficientemente grande, allora δ e λ nelle stime fatte al Passo 1 si possono prendere indipendenti da m. $\square$

Corollario 3.3. (Derivate delle funzioni semiconvesse) *Sia $w = w_1 + w_2$ con w_1 e w_2 semiconvesse e sia $\overline{x}$ un punto di max locale per w. Allora esistono due succesioni $z_n \to \overline{x}$ e $\mathbb{R}^N \ni q_n \to 0$ tali che $w_1,\ w_2$ sono due volte differenziabili in z_n, $Dw(z_n) = q_n$, $D^2 w(z_n) \leq \dfrac{1}{n} I$.*

Dimostrazione. Consideriamo

$$v_n(x) := w(x) - \frac{1}{2n}|x - \overline{x}|^2,$$

che è semiconvessa e ha max stretto in $\overline{x}$. Per i Lemmi di Alexandrov e di Jensen esiste $\alpha_n > 0$ tale che, posto $\forall \delta, r \in (0, \alpha_n]$

$$H_{r,\delta} := K_{r,\delta} \cap \{\text{punti di differenziabilità 2 volte di } w_1 \text{ e } w_2\},$$

dove $K_{r,\delta}$ è l' insieme di contatto superiore per v_n, si ha

$$misH_{r,\delta} > 0.$$

In particolare per ogni $\varepsilon_n \leq \alpha_n$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, $H_{\varepsilon_n,\varepsilon_n} \neq \emptyset$ e quindi esistono $x_n \in B(\overline{x}, \varepsilon_n)$ e $|p_n| \leq \varepsilon_n$ tali che $w(x) - \dfrac{1}{2n}|x-\overline{x}|^2 + p_n \cdot x$ ha max in x_n ed esistono $Dw(x_n)$ e $D^2 w(x_n)$. Da ciò segue che

$$q_n := Dw(x_n) = \left(\frac{1}{n}(x_n - \overline{x}) + p_n\right) \to 0 \text{ e } D^2 w(x_n) \leq \frac{1}{n} I. \quad \square$$

Lemma 3.3. (Massimi interni dei limiti decrescenti) *Siano $f_\varepsilon \in USC(\overline{\Omega})$, $\varepsilon > 0$, uniformemente limitate e non crescenti in ε. Posto $f(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x)$, se $f \leq 0$ su $\partial\Omega$ e f ha max positivo nell'interno, allora esistono $\varepsilon_k \downarrow 0$ e $x_k \in \Omega$ punti di max per f_{ε_k}.*

Dimostrazione. Non è difficile verificare che sotto le ipotesi fatte

$$f(x) = \limsup_{(\varepsilon,y)\to(0,x)} f_\varepsilon(y) := \inf_{r>0} \sup\{f_\varepsilon(y) : \ 0 < \varepsilon < r, \ |x-y| < r\}.$$

Sia $\overline{x} \in \Omega$ di max per f e siano $\varepsilon_k \downarrow 0$ e $y_k \to \overline{x}$ tali che $f_{\varepsilon_k}(y_k) \to f(\overline{x})$. Sia poi $x_\varepsilon \in \overline{\Omega}$ punto di max per f_ε; allora

$$f_{\varepsilon_k}(y_k) \leq f_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}).$$

Sia k_n tale che

$$x_n := x_{\varepsilon_{k_n}} \to \hat{x} \in \overline{\Omega}.$$

allora

$$f(\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} f_{\varepsilon_{k_n}}(y_{k_n}) \leq \limsup_{n\to\infty} f_{\varepsilon_{k_n}}(x_n) \leq f(\hat{x}).$$

Segue che $\hat{x}$ è punto di max per f, quindi $f(\hat{x}) > 0$ e $\hat{x} \notin \partial\Omega$ e si conclude che $x_n \in \Omega$ per n abbastanza grande. $\square$

Ora abbiamo tutti gli strumenti per dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Teorema 3.2. (Principio di Confronto) *Supponiamo $F \in UC(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times S(N))$ ellittica degenere, $u \in BUSC(\overline{\Omega})$ sottosoluzione di* (3.1), *$w \in BLSC(\overline{\Omega})$ soprasoluzione di* (3.1), *e $u \leq w$ su $\partial\Omega$. Allora $u \leq w$ in Ω.*

Dimostrazione. Passo 1: Supponiamo per assurdo che esista un $x_0 \in \Omega$ tale che $(u-w)(x_0) = \gamma > 0$. Siano u^ε e w_ε rispettivamente la sup e la inf convoluzione di u e w. Allora $u^\varepsilon - w_\varepsilon \geq u - w$ quindi $\max_{\overline{\Omega}}(u^\varepsilon - w_\varepsilon) \geq \gamma \; \forall \varepsilon > 0$.

Passo 2: Posso applicare il Lemma 3.3 sui massimi interni perchè $u = \inf_\varepsilon u^\varepsilon$, $w = \sup_\varepsilon w_\varepsilon$ quindi $u - w = \inf_\varepsilon (u^\varepsilon - w_\varepsilon)$ e $u - w \leq 0$ su $\partial\Omega$. Allora esistono $\varepsilon_k \searrow 0$, $x_k \in \Omega$ di massimo per $v_k := (u^{\varepsilon_k} - w_{\varepsilon_k})$ e quindi $v_k(x_k) \geq \gamma$, $\forall k$.

Passo 3: Poichè v_k è semiconvessa, per il Corollario 3.3. sulle derivate delle funzioni semiconvesse esistono $z_n \to x_k$, $q_n \to 0$ per $n \to \infty$, tali che

$$
\begin{aligned}
q_n = Dv_k(z_n) &= Du^{\varepsilon_k}(z_n) - Dw_{\varepsilon_k}(z_n), \\
\frac{1}{n} I \geq D^2 v_k(z_n) &= D^2 u^{\varepsilon_k}(z_n) - D^2 w_{\varepsilon_k}(z_n).
\end{aligned}
$$

.

Passo 4: Per il Lemma 3.1 sull'equazione approssimata per l'inf- sup-convoluzione si ha (posto $\varepsilon = \varepsilon_k$)

$$u^\varepsilon(z_n) + F(z_n, Du^\varepsilon(z_n), D^2 u^\varepsilon(z_n)) \leq \rho(\varepsilon)$$

$$-w_\varepsilon(z_n) - F(z_n, Dw_\varepsilon(z_n), D^2 w_\varepsilon(z_n)) \leq \rho(\varepsilon).$$

Quindi per il Passo 3 e l'ellitticità degenere di F si ha

$$u^\varepsilon(z_n) - w_\varepsilon(z_n) \leq \omega(|q_n| + \frac{\sqrt{N}}{n}) + 2\rho(\varepsilon)$$

dove ω è il modulo di continuità di F e la norma in $S(N)$ è quella euclidea. Facendo tendere $n \to \infty$ si ha

$$\gamma \leq u^{\varepsilon_k}(x_k) - w_{\varepsilon_k}(x_k) \leq 2\rho(\varepsilon_k)$$

e otteniamo un assurdo per k tale che $\rho(\varepsilon_k) < \gamma$. □

Esempi: Ecco alcuni esempi di equazioni che soddisfano il Principio di Confronto appena dimostrato:

- $-a_{i,j} u_{x_i,x_j} + b_i u_{x_i} + u = f(x)$ con $(a_{i,j}) \geq 0$, $a_{i,j}$, b_i costanti, $f \in C(\overline{\Omega})$;
- $|Du| + u = f(x)$ con $f \in C(\overline{\Omega})$;
- $\max\{|Du| + u - f(x),\ -\Delta u + u - g(x)\} = 0$ con $f, g \in C(\overline{\Omega})$.

Osservazione 3.2. La dimostrazione del Principio di Confronto data qui sopra funziona pressochè invariata per F che anzichè essere uniformemente continua, è solo continua in $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times S(N)$ e uniformemente continua in x, cioè tale che

$$F(x,p,X) - F(y,p,X) \leq \omega_x(|x-y|),\ \forall x, y \in \overline{\Omega},\ p \in \mathbb{R}^N,\ X \in S(N). \tag{3.6}$$

Questa è l'ipotesi usata nel Lemma 3.1, mentre nel passo 4 della dimostrazione del Teorema 3.2 si puó usare la semiconcavità di w_ε e la semiconvessità di u^ε per ottenere la limitatezza di $Du^\varepsilon(z_n)$ e $Dw_\varepsilon(z_n)$, per ogni ε fissato e per stimare, usando il Passo 3,

$$(C_\varepsilon + \frac{1}{n})I \geq D^2 w_\varepsilon(z_n) + \frac{1}{n}I \geq D^2 u^\varepsilon(z_n) \geq -C_\varepsilon I;$$

questa stima implica la limitatezza di $D^2 u^\varepsilon(z_n)$ e $D^2 w_\varepsilon(z_n)$ se si usa in $S(N)$ la norma della traccia

$$||X|| = \sum_{\nu \in eig(X)} |\nu|, \tag{3.7}$$

dove $eig(X)$ è l'insieme degli autovalori di $X \in S(N)$ contati con la loro molteplicità.

La dimostrazione funziona anche per equazioni del tipo

$$\beta(u) + F(x, Du, D^2u) = 0,$$

con $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente, com'è facile verificare.

Esempi: Grazie all'Osservazione 3.2, anche le seguenti equazioni soddisfano il Principio del Confronto.

- $|Du|^k + \beta(u) = f(x)$, con $k \geq 0$, β strettamente crescente, $f \in C(\overline{\Omega})$;
- $-\Delta_m u + \beta(u) = f(x)$, con $m \geq 2$, β, f come sopra;
- $-\Delta_\infty u + \beta(u) = f(x)$.

L'ipotesi più restrittiva che ci è rimasta è la uniforme continuità in x (3.6) che esclude, ad esempio, gli operatori lineari a coefficienti non costanti. Con un po' di lavoro in più questa ipotesi si può indebolire in modo da comprendere equazioni lineari a coefficienti Lipschitz, equazioni di Hamilton-Jacobi-Bellman (max di operatori lineari) o di Isaacs (maxmin o minmax di operatori lineari). Poichè la formulazione dell'ipotesi più generale è piuttosto tecnica, rimandiamo il lettore a [IL], [J2],[C],[CIL], o al recente lavoro [S] dove la dimostrazione è molto simile a quella presentata qui. Per operatori con dipendenza solo misurabile da x si veda [CKSS], per equazioni con F non strettamente monotona rispetto a u si vedano [IL], [J2] e [J3], per equazioni del primo ordine [Ba] e [BCD].

4. Il Problema di Dirichlet

In questa sezione consideriamo il problema di Dirichlet

$$(DP) \qquad \begin{cases} u + F(x, Du, D^2u) = 0 & \text{in } \Omega \quad (4.1); \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

con Ω aperto limitato e studiamo esistenza e unicità di una soluzione di viscosità di (4.1) che assuma i dati al bordo in un senso opportuno. Definiamo gli insiemi

$$\mathcal{S}_g := \{u \in BUSC(\overline{\Omega}) \text{ sottosoluzioni di (4.1) } : u \leq g \text{ su } \partial\Omega\}$$

$$\mathcal{Z}_g := \{u \in BLSC(\overline{\Omega}) \text{ soprasoluzioni di (4.1) } : u \geq g \text{ su } \partial\Omega\}.$$

Il Principio di Confronto implica che $u \leq U, \forall u \in \mathcal{S}_g,\ U \in \mathcal{Z}_g$. Quindi, se esiste una $u \in C(\overline{\Omega})$ soluzione di (DP), allora è unica, anzi

$$u = \max_{v \in \mathcal{S}_g} v(x) = \min_{V \in \mathcal{Z}_g} V(x).$$

Motivati da questo e dal classico metodo di Perron per l'equazione di Laplace, diamo la seguente definizione.

Definizione 4.1. Le *soluzioni generalizzate alla Perron di (DP)* sono

$$\underline{H}_g(x) := \sup_{u \in \mathcal{S}_g} u(x)$$

$$\overline{H}_g(x) := \inf_{U \in \mathcal{Z}_g} U(x).$$

Proviamo ora che $\underline{H}_g$ e $\overline{H}_g$ risolvono (4.1) in un senso generalizzato dovuto a Ishii [I].

Definizione 4.2. Per una funzione localmente limitata $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$u^*(x) := \limsup_{y \to x} u(y), \quad u_*(x) := \liminf_{y \to x} u(y).$$

Non è difficile dimostrare (vedi Prop. V.2.1 in [BCD]) che
a) $u^*(x) = \min\{v(x) :\ v \in USC(\overline{\Omega}) :\ v \geq u\}$,
b) $u_*(x) = \max\{v(x) :\ v \in LSC(\overline{\Omega}) :\ v \leq u\}$,
c) u continua in $x \Leftrightarrow\ u_*(x) = u^*(x)$.

Supporemo che

$$(H_0) \qquad \mathcal{S}_g \neq \emptyset,\ \mathcal{Z}_g \neq \emptyset,$$

il che implica, per il Principio di Confronto,

$$-\infty < \underline{H}_g \leq \overline{H}_g < +\infty.$$

Il seguente risultato è un equivalente del Teorema di Perron per le soluzioni di viscosità.

Teorema 4.1. (Ishii) *Se valgono il Principio di Confronto e* (H_0) *allora*

$$\underline{H}_g{}^* \text{ e } \overline{H}_g{}^* \textit{ sono sottosoluzioni di } (4.1),$$

$$\underline{H}_{g*} \text{ e } \overline{H}_{g*} \textit{ sono soprasoluzioni di } (4.1).$$

In particolare, se $\underline{H}_g$ *o* $\overline{H}_g$ *è continua in* Ω*, allora è soluzione di* (4.1).

Per la dimostrazione si usano i seguenti due risultati:

Proposizione 4.1. *Se* $\mathcal{S} \neq \emptyset$ *è una famiglia di sottosoluzioni di* (4.1) *e*

$$u(x) := \sup_{v \in \mathcal{S}} v(x) < +\infty,$$

allora $u^*(x)$ *è sottosoluzione di* (4.1).

Dimostrazione. Vediamo per semplicità solo il caso in cui $u^*(x) = u(x)$ e il sup è un max. Siano $\phi \in C^2, x_0$ punto di massimo per $u - \phi$. Allora, detta $\overline{v}$ la funzione che realizza il max in x_0

$$\overline{v}(x_0) - \phi(x_0) = (u - \phi)(x_0) \geq (u - \phi)(x) \geq (v - \phi)(x)$$

per ogni $v \in \mathcal{S}$ e x vicino a x_0. Allora,

$$u(x_0) + F(x_0, D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) = \overline{v}(x_0) + F(x_0, D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0,$$

perchè per ipotesi $\overline{v}$ è sottosoluzione. $\square$

Il seguente lemma rimpiazza il sollevamento armonico nel presente contesto. La dimostrazione non è difficile e si trova, ad esempio, su [I],[CIL], [BCD].

Bump Lemma 4.1. *Se* u^* *è sottosoluzione di* (4.1) *e* u_* *non è soprasoluzione in* $\hat{x}$*, allora esiste* $\varepsilon > 0$ *piccolo ed esiste una sottosoluzione* v *di* (4.1) *tale che*

$$\begin{cases} v(x) \geq u(x), & \sup_\Omega (v - u) > 0, \\ v \equiv u & \text{per } |x - \hat{x}| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Dimostrazione Teorema 4.1. $\underline{H}_g{}^*$ è sottosoluzione per la Proposizione 4.1. Supponiamo per assurdo che $\underline{H}_{g*}$ fallisca di essere soprasoluzione nel punto $\hat{x}$;

allora per il Bump Lemma 4.1. esiste $v \in \mathcal{S}_g$ tale che $\sup(v - \underline{H}_g) > 0$. Ma questo è assurdo perchè per definizione $\underline{H}_g = \sup_{v\in\mathcal{S}_g} v$. □

Proseguendo lungo la traccia della teoria classica del potenziale, seguiamo ora l'idea di Wiener [W] di studiare per quali dati g le soluzioni di Perron $\underline{H}_g$ e $\overline{H}_g$ coincidono, e forniscono quindi una soluzione generalizzata del problema di Dirichlet.

Definizione 4.3. Se $\underline{H}_g = \overline{H}_g =: H_g$ il dato g si dice *risolutivo* per (DP) e H_g è la *soluzione generalizzata alla Wiener o soluzione inviluppo di* (DP).

Teorema 4.2. (Esistenza di soluzioni generalizzate) *Se* $\forall x \in \partial\Omega$ *esiste* $u \in \mathcal{S}_g$ *(risp.* $u \in \mathcal{Z}_g$*) tale che*

$$g(x) = \lim_{y\to x} u(y), \tag{4.2}$$

allora g *è risolutiva e* $H_g = \min_{v\in\mathcal{Z}_g} v$ *(risp.* $H_g = \max_{v\in\mathcal{S}_g} v$*) è la soluzione inviluppo di* (DP).

Dimostrazione. Fissato $x \in \partial\Omega$, $u \in \mathcal{S}_g$ che soddisfa (4.2) è tale che $u \leq \underline{H}_g$. Allora

$$\underline{H}_{g*}(x) = \liminf_{y\to x} \underline{H}_g(y) \geq \liminf_{y\to x} u(y) = g(x).$$

Ma $\underline{H}_{g*}$ è soprasoluzione di (4.1) per il Teorema di Ishii 4.1. quindi $\underline{H}_{g*} \in \mathcal{Z}_g$. Dunque

$$\underline{H}_{g*} \geq \overline{H}_g \geq \underline{H}_g$$

e quindi

$$\underline{H}_g = \overline{H}_g \text{ e } \underline{H}_g \in \mathcal{Z}_g.$$

La dimostrazione nell'altro caso è del tutto analoga. □

Osservazione 4.1. Nella Sezione 5 dimostriamo che l'insieme dei dati risolutivi è chiuso rispetto alla convergenza uniforme. Ricordiamo che per l'equazione di Laplace Wiener provò che ogni dato g continuo è risolutivo [W], [H], e il risultato è stato esteso a operatori quasi lineari in forma di divergenza anche non uniformemente ellittici, si veda [HKM].

Dal Teorema 4.2 segue subito un risultato di esistenza di una soluzione di viscosità continua del problema di Dirichlet.

Corollario 4.1. *Se* $\forall x \in \partial\Omega$ *esistono* $u \in \mathcal{S}_g$ *e* $v \in \mathcal{Z}_g$ *che soddisfano* (4.2), *allora* H_g *è continua in* $\overline{\Omega}$, $H_g = g$ *su* $\partial\Omega$, *ed è l'unica soluzione continua di* (DP).

Un esempio in cui esistono funzioni u e v con le proprietà richieste dal Corollario 4.1, cioè barriere inferiori e superiori, è nella prossima sezione.

5. Alcune proprietà delle soluzioni generalizzate del problema di Dirichlet

In questa sezione accenniamo prima molto brevemente alla regolarità delle soluzioni, poi dimostriamo la dipendenza continua dal dato al bordo della soluzione generalizzata del problema di Dirichlet (DP). Cominciamo con la regolarità al bordo delle soluzioni di Perron per equazioni uniformemente ellittiche.

Definizione 5.1. F è *uniformemente ellittico* se esistono $0 < \lambda < \Lambda$ tali che

$$\forall Z \geq 0 \qquad F(x, p, X + Z) \leq F(x, p, X) - \lambda \mathrm{Trace} Z,$$

$$|F(x, p, X) - F(x, p, Y)| \leq \Lambda ||X - Y||,$$

per ogni $x \in \Omega$, $p \in \mathbb{R}^N, X, Y \in S(N)$.

Teorema 5.1. *Fissato $x \in \partial\Omega$, se Ω soddisfa la condizione di sfera esterna in x (cioè $\exists\, B(y, r)$ tale che $\overline{B}(y, r) \cap \overline{\Omega} = \{x\}$), F è uniformemente ellittico e $g \in C(\partial\Omega)$, allora*

i) esistono $u \in \mathcal{S}_g$ e $v \in \mathcal{Z}_g$ che soddisfano (4.2);

ii) $\underline{H}_g$ e $\overline{H}_g$ sono continue in x e $\underline{H}_g(x) = \overline{H}_g(x) = g(x)$.

Dimostrazione. i) si ottiene adattando alle soluzioni di viscosità un argomento classico, si veda [C]. Per provare ii) si osserva che i) implica, per la dimostrazione del Teorema 4.2.,

$$g(x) \leq \underline{H}_{g_*}(x) \quad \text{e} \quad \overline{H}_g{}^*(x) \leq g(x).$$

D'altra parte

$$\underline{H}_{g_*} \leq \overline{H}_{g_*} \leq \overline{H}_g{}^* \quad \text{e} \quad \underline{H}_{g_*} \leq \underline{H}_g{}^* \leq \overline{H}_g{}^*$$

e si conclude che

$$\underline{H}_{g_*} = \underline{H}_g{}^* = g = \overline{H}_{g_*} = \overline{H}_g{}^*. \quad \square$$

Combinando questo risultato col Corollario 4.1. si ottiene subito il

Corollario 5.1. *Se Ω soddisfa la condizione di sfera esterna in ogni punto di $\partial\Omega$, F è uniformemente ellittico e $g \in C(\partial\Omega)$, allora $H_g \in C(\overline{\Omega})$ è la soluzione di (DP).*

Nel caso uniformemente ellittico si possono dimostrare risultati di regolarità locale all'interno di Ω di ogni soluzione di viscosità continua. Tale regolarità è $W^{2,p}$ sotto ipotesi abbastanza generali e $C^{2,\alpha}$ se F è convessa in (p, X) (Teorema di Evans-Krylov), si veda il volume [CC] e la sua bibliografia.

Diamo ora il teorema di dipendenza continua delle soluzioni generalizzate di (DP) dai dati al bordo.

Notazione: Indicheremo con $\rightrightarrows$ la convergenza uniforme.

Teorema 5.2. *Siano $F : \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times S(N) \to \mathbb{R}$ continua e propria e $g_n : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una succesione di dati continui e risolutivi tali che $g_n \rightrightarrows g$ on $\partial\Omega$. Allora g è risolutivo e $H_{g_n} \rightrightarrows H_g$ su Ω.*

Per dimostrare il teorema ci serve il seguente:

Lemma 5.1. *i) Sia $c > 0$ allora $\underline{H}_{(g+c)} \leq \underline{H}_g + c$ e $\overline{H}_{(g+c)} \leq \overline{H}_g + c$.*

ii) Se $f \leq g$ allora $\underline{H}_f \leq \underline{H}_g$ e $\overline{H}_f \leq \overline{H}_g$.

Dimostrazione. Sia

$$\mathcal{S}_c := \{w \in BUSC(\overline{\Omega}) : \ w \text{ è sottosoluzione di (4.1)}, \ w \leq g + c \text{ su } \partial\Omega\}.$$

Fissiamo $u \in \mathcal{S}_c$, e consideriamo la funzione $v(x) = u(x) - c$: sia $(p, X) \in J^{2,+}v(x)$, allora

$$F(x, v(x), p, X) \leq F(x, u(x), p, X) \leq 0$$

poichè F è propria, u è sottosoluzione e $J^{2,+}v(x) = J^{2,+}u(x)$. Quindi $v \in \mathcal{S}$. Abbiamo dimostrato che

$$\forall u \in \mathcal{S}_c \ \exists v \in \mathcal{S} \text{ tale che } u(x) = v(x) + c.$$

Allora

$$\underline{H}_{(g+c)} := \sup_{u\in\mathcal{S}_c} u \leq \sup_{v\in\mathcal{S}} v + c := \underline{H}_g + c. \quad \square$$

Dimostrazione Teorema 5.2. Fissiamo $\varepsilon > 0$, per l'uniforme convergenza $\exists m$: $\forall n \geq m$ tale che $g_n - \varepsilon \leq g \leq g_n + \varepsilon$. Allora per il Lemma 5.1. e il fatto che g_n è risolutivo, concludiamo

$$H_{g_n} - \varepsilon = \underline{H}_{g_n} - \varepsilon \leq \underline{H}_{(g_n-\varepsilon)} \leq \underline{H}_g \leq$$

$$\leq \underline{H}_{(g_n+\varepsilon)} \leq \underline{H}_{g_n} + \varepsilon = H_{g_n} + \varepsilon,$$

ovvero $H_{g_n} \rightrightarrows \underline{H}_g$. Analogamente $H_{g_n} \rightrightarrows \overline{H}_g$, e questo conclude la dimostrazione. $\square$

6. Un Lemma di tipo Hopf ed un Principio di Massimo Forte

In questa sezione consideriamo sottosoluzioni dell'equazione modello

$$|u(x)|^{k-1}u(x) + F(Du(x), D^2u(x)) = 0 \tag{6.1}$$

dove $k \geq 1$, $F: \mathbb{R}^N \times S(N) \to \mathbb{R}$ è continua e soddisfa per qualche $\alpha \leq k$

$$(H_0) \qquad F(\delta p, \delta X) \geq \delta^\alpha F(p, X), \quad \forall \delta > 0, \forall (p, X) \in \mathbb{R}^N \times S(N).$$

Ad esempio (H_0) è verificata se F è positivamente omogenea di grado α.

Il seguente lemma è un'estensione del Boundary Lemma di Hopf alle sottosoluzioni di viscosità dell'equazione (6.1), basato su una ipotesi di non degenerazione di F nella direzione della normale alla frontiera dell'insieme dove vale l'equazione.
Notazione: Per ogni $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ indichiamo con $w \otimes w$ quella matrice tale che $(w \otimes w)_{ij} := w_i w_j$.
Lemma 6.1. *Assumiamo (H_0) con $\alpha \leq k$. Siano O un aperto di $\mathbb{R}^N$, $u \in USC(O)$ una sottosoluzione di viscosità di (6.1) in O e $x_0 \in \partial O$ tale che*

i) *u è semicontinua superiormente in x_0;*
ii) *$u(x_0) > u(x)$, $\forall x \in O$ e $u(x_0) \geq 0$;*
iii) *esistono $y \in O$ e $R > 0$ tali che $B := B(y, R) \subseteq O$, $\overline{B} \bigcap \partial O = \{x_0\}$;*
iv) *esiste $t > 0$ tale che*

$$F(\nu, I - t\nu \otimes \nu) > 0 \tag{6.2}$$

dove $\nu = x_0 - y$. Allora per ogni $w \in \mathbb{R}^N$ tale che $w \cdot \nu < 0$ si ha

$$\limsup_{s \to 0} \frac{u(x_0 + sw) - u(x_0)}{s} < 0. \tag{6.3}$$

Dimostrazione. Sia

$$v(x) := e^{-\gamma R^2} - e^{-\gamma |x-y|^2},$$

dove $\gamma > 0$ è una costante da scegliere opportunamente. Si noti che $v(x_0) = 0$ e $v(x) < 0$ per $0 < |x - y| < R$.

Usando (H_0) e $iv)$ si trova:

$$\begin{aligned}
&|v(x_0)|^{k-1} v(x_0) + F(Dv(x_0), D^2 v(x_0)) \\
&\qquad = F(2\gamma e^{-\gamma|\nu|^2} \nu, -4\gamma^2 e^{-\gamma|\nu|^2} \nu \otimes \nu + 2\gamma e^{-\gamma|\nu|^2} I) \geq \\
&\qquad (2\gamma e^{-\gamma|\nu|^2})^\alpha F(\nu, -2\gamma \nu \otimes \nu + I) > 0
\end{aligned}$$

per $\gamma = t/2$. Quindi per continuità esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in X := B(x_0, r) \bigcap B(y, R)$:

$$|v(x)|^{k-1} v(x) + F(Dv(x), D^2 v(x)) \geq 0.$$

Grazie a (H_0) con $\alpha \leq k$ anche εv è soprasoluzione di (6.1) in X per ogni $\varepsilon \in]0,1]$. Scegliendo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo si ha $u(x) - u(x_0) \leq \varepsilon v(x)$ su $\partial X \bigcap \partial B(x_0, r)$ e quindi anche su $\partial X \bigcap \partial B(y, R)$ dove $v = 0$. Essendo $u - u(x_0)$ e εv, rispettivamente, sotto e soprasoluzione di viscosità di (6.1) in X, per il Principio di Confronto si ha

$$u(x) - u(x_0) \leq \varepsilon v(x), \quad \forall x \in X. \tag{6.4}$$

Così per ogni w tale che $w \cdot \nu < 0$ otteniamo

$$\limsup_{s \to 0} \frac{u(x_0 + sw) - u(x_0)}{s} \leq \varepsilon Dv(x_0) \cdot w = 2\gamma e^{-\gamma |\nu|^2} \nu \cdot w < 0,$$

che è la conclusione cercata. □

Il prossimo risultato è un Principio di Massimo Forte per le sottosoluzioni di viscosità $u \in BUSC(\Omega)$ dell'equazione (6.1). Qui dobbiamo assumere la condizione di stretta ellitticità di F che implica la proprietà (iv) del Lemma 6.1 in ogni punto:

(H_1) Per ogni $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ esiste $t > 0$ tale che

$$F(w, I - tw \otimes w) > 0. \tag{6.5}$$

Teorema 6.1. *Assumiamo (H_0) con $\alpha \leq k$ e (H_1). Siano Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e $u \in BUSC(\Omega)$ una sottosoluzione di viscosità di (6.1). Se u ha un massimo non negativo in Ω, allora u è costante.*

Dimostrazione. Sia $M = \max_\Omega u$ e definiamo $K := \{x \in \Omega : \; u(x) = M\}$. Supponiamo per assurdo che $K \neq \Omega$. Allora esistono $x_0 \in \partial K$, $y \in \Omega \setminus K$ e $R > 0$ tali che $B(y, R) \subseteq \Omega \setminus K$ e $\overline{B}(y, R) \bigcap K = \{x_0\}$. Consideriamo in Ω la sup-convoluzione di u definita nella Sezione 2. Osserviamo che per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme dei punti di massimo di $u^\varepsilon(x)$ contiene K, visto che per ogni $x \in \Omega$ si ha $u(x) \leq u^\varepsilon(x) \leq M$. Inoltre, per il Lemma 3.1, $u^\varepsilon(x)$ è sottosoluzione di viscosità di

$$|u^\varepsilon(x)|^{k-1} u^\varepsilon(x) + F(Du^\varepsilon(x), D^2 u^\varepsilon(x)) \leq 0 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon.$$

Possiamo applicare il Lemma 6.1 a u^ε in $O := \Omega_\varepsilon \setminus K$ e ottenere per $w := y - x_0$

$$\limsup_{s \to 0} \frac{u^\varepsilon(x_0 + sw) - u^\varepsilon(x_0)}{s} < 0. \tag{6.6}$$

Questo è in contraddizione con la condizione $\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial w}(x_0) = 0$ che vale nel punto di massimo x_0 se u^ε è differenziabile in tale punto. Per provare tale differenziabilità, consideriamo i semigetti di ordine 1 di u^ε, o sotto e sopradifferenziali, analoghi ai semigetti di ordine 2 della Def. 1.3. Diremo che un vettore $p \in J^{1,+}u^\varepsilon(x_0) = D^+u^\varepsilon(x_0)$ (risp. $J^{1,-}u^\varepsilon(x_0) = D^-u^\varepsilon(x_0)$) se

$$u^\varepsilon(x) \leq u^\varepsilon(x_0) + p \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|), \text{ per } x \to x_0 \quad (\text{risp. } \geq).$$

Chiaramente $0 \in D^+u^\varepsilon(x_0)$ poichè x_0 è punto di massimo, inoltre $D^-u^\varepsilon(x) \neq \emptyset$ per ogni x, perchè u^ε è semiconvessa (vedi per es. Prop.II.4.7 in [BCD]). Ma una funzione che ha sotto e sopradifferenziale entrambi non vuoti in un punto è ivi differenziabile (Lemma II.1.8 in [BCD]). Questo prova la differenziabilità di u^ε in x_0 e completa la dimostrazione. □

È chiaro che una condizione sufficiente per (H_1) è l'uniforme ellitticità di F, cioè l'esistenza di $\lambda > 0$ tale che, per ogni $p \in \mathbb{R}^N$, $X, Y \in S(N)$, $Y \geq 0$,

$$F(p, X - Y) \geq F(p, X) + \lambda \text{Trace} Y,$$

e anche la più debole

$$F(p, I - Y) \geq F(p, I) + \eta(p, \text{Trace} Y), \tag{6.7}$$

per ogni $p \neq 0$, $Y \in S(N)$, $Y \geq 0$, con η tale che $\liminf_{t \to +\infty} \eta(p, t) > F(p, I)$.
Esempi: il Principio di Massimo Forte appena dimostrato vale per soluzioni di

- $-\Delta u + |u|^{k-1}u \leq 0$ con $k \geq 1$;
- $-\Delta_m u + |u|^{k-1}u \leq 0$ con $k \geq m - 1, m \geq 2$, poichè per l'm-Laplaciano Δ_m si ha
$$F(p, X) = -|p|^{m-2}\text{Trace}X - (m - 2)|p|^{m-4}p \cdot Xp\,;$$
che è positivamente omogeneo di grado $m - 1$ e soddisfa (6.7);
- $-\Delta_\infty u + |u|^{k-1}u \leq 0$ con $k \geq 3$, poichè perl'∞-Laplaciano Δ_∞ si ha
$$F(p, X) = p \cdot Xp$$
che è omogenea di grado 3 e soddisfa (6.7).

Per quanto riguarda i primi due esempi, i risultati di Vazquez [V] (anche se per soluzioni deboli anzichè di viscosità) indicano che la soglia per k è ottimale; in particolare il Principio di Massimo Forte non vale per l'm-Laplaciano con $m > 2$ se $k = 1$.

Kawohl e Kutev [KK] hanno provato un Principio di Massimo Forte per sottosoluzioni di viscosità di equazioni piuttosto generali, in particolare non strettamente crescenti in u, con dipendenza solo misurabile da x e con un'ipotesi di ellitticità simile a (6.7) ma con η indipendente da p, che quindi non è soddisfatta dall'm-Laplaciano e dall'∞-Laplaciano.

Ringraziamenti

Desideriamo ringraziare il Professor E. Lanconelli per l'invito a scrivere questo articolo, P. Soravia per varie discussioni sulla dimostrazione del Principio di Confronto, e F. Pacella per preziose osservazioni e indicazioni bibliografiche sul Principio di Massimo Forte.

Bibliografia

[BB1] M. Bardi, S. Bottacin: *Discontinuous solution of degenerate elliptic boundary value problems*, Preprint 22, Dip. di Mat. Univ. di Padova, 1995.

[BB2] M. Bardi, S. Bottacin: *On the Dirichlet problem for degenerate elliptic equations and applications to optimal control*, in preparazione.

[BCD] M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta: *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[BCESS] M. Bardi, M.G. Crandall, L.C. Evans, H.M. Soner, P.E. Souganidis: *Viscosity solutions and applications*, I. Capuzzo Dolcetta e P.L. Lions eds., Lecture Notes in Mathematics 1660, Springer, Berlin, 1997.

[BDL] M. Bardi, F. Da Lio: *Propagation of maxima and strong maximum principle for fully nonlinear degenerate elliptic equations*, in preparazione.

[Ba] G. Barles: *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer-Verlag, Paris, 1994.

[CC] L.A. Caffarelli, X. Cabré: *Fully nonlinear elliptic equations*, Amer. Math. Soc., Providence, 1995.

[C] M.G. Crandall: *Viscosity solutions: a primer*, in [BCESS].

[CIL] M.G. Crandall, H. Ishii, P.L. Lions: *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 1-67.

[CKSS] M.G. Crandall, M. Kocian, P.Soravia, A Świech: *On the equivalence of various weak notions of solutions of elliptic PDEs with measurable ingradients,* Alvino A. et altri eds., Progress in elliptic and parabolic partial differential equations, Pitman Research Notes 350, 136-162, Longman, Harlow, 1996.

[EG] L.C. Evans, R.F. Gariepy: *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[FS] W.H. Fleming, H.M. Soner: *Controlled Markov Process and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[GT] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[H] L.L. Helms: *Introduction to potential theory*, Wiley, New York, 1969.

[HKM] J. Heinonen, T. Kiepeläinen, O. Martio: *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Oxford Science Pubblications, Oxford, 1993.

[I] H. Ishii: *Perron's method for Hamilton-Jacobi equations*, Duke Math. J. 55 (1987), 369-384.

[IL] H. Ishii, P.L. Lions: *Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations,* J. h Differential Equations 83 (1990), 26–78.

[J1] R. Jensen: *The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 101 (1988), 1-27.

[J2] R. Jensen: *Uniqueness criteria for viscosity solutions of fully nonlinear elliptic partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J. 38 (1989), 629-667.

[J3] R. Jensen: *Uniqueness of Lipschitz extensions: minimizing the sup norm of the gradient,* Arch. Rat. Mech. Anal. 123 (1993) 51-74.

[JLS] R. Jensen, P.L. Lions, P.E. Souganidis: *A uniqueness result for viscosity solutions of second order fully nonlinear PDEs*, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), 975-978.

[KK] B. Kawohl, N. Kutev: *Strong maximum principle for semicontinuous viscosity solutions of nonliear partial differential equations*, Arch. Math. (Basel) 40 (1998), in print.

[L] P.L. Lions: *Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. Part 1: The dynamic programming principle and applications, Part 2: Viscosity solutions and uniqueness*, Comm. Partial. Differential Equations 8, (1983), 1101-1174 and 1229-1276. *Part 3: Regularity of the optimal cost function*, in " Nonlinear PDEs and Applications", Volume V of College de France Seminar, 95-205, Pitman, Boston, 1983.

[S] P. Soravia: *On nonlinear convolution and uniqueness of viscosity solutions*, Preprint.

[V] J.L. Vázquez: *A strong maximum principle for quasilinear elliptic equations,* Appl. Math. Optim. 12 191-202 (1984).

[W] N. Wiener: *Note on a paper of O. Perron*, J. Math. Physics (M.I.T.) 4 (1925), 21-32.