Calcolo di punti quasi ottimali per l'interpolazione polinomiale sul triangolo

Candidato Matteo Briani
Relatore Dott. Alvise Sommariva
Correlatore Prof. Marco Vianello

28 novembre 2010

Notazione

- Indichiamo con $\mathcal{P}_n$ lo spazio dei polinomi di grado totale n e con Ω un dominio compatto di $\mathbb{R}^2$, nel nostro caso un triangolo. Abbiamo che $\dim \mathcal{P}_n = N = \binom{n+2}{n}$.

Notazione

- Indichiamo con $\mathcal{P}_n$ lo spazio dei polinomi di grado totale n e con Ω un dominio compatto di $\mathbb{R}^2$, nel nostro caso un triangolo. Abbiamo che $\dim \mathcal{P}_n = N = \binom{n+2}{n}$.
- Sia $\{z_i\}$ un insieme unisolvente su Ω per l'interpolazione polinomiale di grado N.

Notazione

- Indichiamo con $\mathcal{P}_n$ lo spazio dei polinomi di grado totale n e con Ω un dominio compatto di $\mathbb{R}^2$, nel nostro caso un triangolo. Abbiamo che $\dim \mathcal{P}_n = N = \binom{n+2}{n}$.
- Sia $\{z_i\}$ un insieme unisolvente su Ω per l'interpolazione polinomiale di grado N.
- Denotiamo con $V = V(z_1, z_2, \dots, z_N)$ la matrice le cui componenti sono

$$V_{ij} = \{p_j(z_i) : i, j = 1, \dots, N\}$$

con $\{p_j, j = 1, \dots, N\}$ base di $\mathcal{P}_n$ in Ω

Costante di Lebesgue Λ_n

- $$L_k(z) = \frac{det(V(z_1, \ldots, z_{k-1}, z, z_{k+1}, \ldots, z_N))}{det(V(z_1, \ldots, z_N))} \qquad k = 1, \ldots, N$$

$$\Lambda_n = \max_{z \in \Omega} \sum_{k=0}^{n} |L_k(z)|$$

Costante di Lebesgue Λ_n

- $$L_k(z) = \frac{det(V(z_1, \ldots, z_{k-1}, z, z_{k+1}, \ldots, z_N))}{det(V(z_1, \ldots, z_N))} \qquad k = 1, \ldots, N$$

  $$\Lambda_n = \max_{z \in \Omega} \sum_{k=0}^{n} |L_k(z)|$$

- Si dimostra valere la disequazione

  $$\|f - I_N f\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n)\|f - p^*\|_\infty$$

  con $I_N f$ polinomio interpolatore di f e p^* polinomio di miglior approsimazione.

Punti di Lebesgue

Punti di Lebesgue

- Fissato il dominio Ω e lo spazio $\mathcal{P}_n$ dei polinomi di grado totale n i punti che minimizzano la costante di Lebesgue sono detti i punti di Lebesgue.

Punti di Fekete

Punti di Fekete

- I punti di Fekete sono i punti che massimizzano il valore assoluto del determinante della matrice di Vandermonde V

$$\max_{z_i} |\det (V(z_1, \dots, z_N))|$$

Punti di Fekete

- I punti di Fekete sono i punti che massimizzano il valore assoluto del determinante della matrice di Vandermonde V

$$\max_{z_i} |\det (V(z_1, \ldots, z_N))|$$

- Sono un valido approccio ai punti di Lebesgue in quanto si dimostra abbiano costante di Lebesgue

$$\Lambda_n \leq N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Algoritmo di ricerca

Algoritmo di ricerca

- Per la ricerca dei punti di Fekete si è utilizzato l'ottimizzatore `fmincon` di Matlab.

Algoritmo di ricerca

- Per la ricerca dei punti di Fekete si è utilizzato l'ottimizzatore `fmincon` di Matlab.
- Caratteristiche:
  - General purpose
  - Facilmente parallelizzabile
  - Permette la scelta di differenti algoritmi di ricerca
  - La ricerca termina al raggiungimento di un massimo locale

Primo metodo

- Viene imposto ai punti unicamente di non uscire dal dominio

Primo metodo

- Viene imposto ai punti unicamente di non uscire dal dominio

Vantaggi

- Ogni disposizione di punti è possibile

Primo metodo

- Viene imposto ai punti unicamente di non uscire dal dominio

Vantaggi

- Ogni disposizione di punti è possibile

Svantaggi

- Alto costo computazionale

Secondo metodo

- Fissiamo i punti sui bordi e lavoriamo solo su quelli interni

Secondo metodo

- Fissiamo i punti sui bordi e lavoriamo solo su quelli interni

Congetture

- I punti sul bordo siano i LGL univariati
- I punti interni, escluso il baricentro, appartengano a orbite di ordine 3 o 6

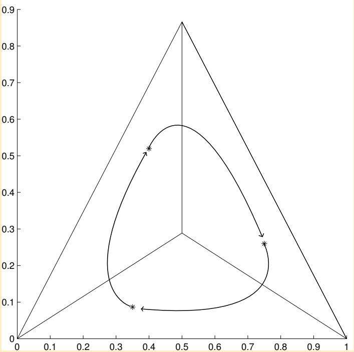
Secondo metodo

- Fissiamo i punti sui bordi e lavoriamo solo su quelli interni

Congetture

- I punti sul bordo siano i LGL univariati
- I punti interni, escluso il baricentro, appartengano a orbite di ordine 3 o 6

Orbita di ordine 3



Algoritmo di ricerca

Algoritmo di ricerca

- Anche per la ricerca dei punti di Lebesgue si è utilizzato l'ottimizzatore `fmincon`.

Algoritmo di ricerca

- Anche per la ricerca dei punti di Lebesgue si è utilizzato l'ottimizzatore `fmincon`.
- Differenze dal problema precedente

Algoritmo di ricerca

- Anche per la ricerca dei punti di Lebesgue si è utilizzato l'ottimizzatore `fmincon`.
- Differenze dal problema precedente
  - Stima della costante tramite mesh di controllo

Algoritmo di ricerca

- Anche per la ricerca dei punti di Lebesgue si è utilizzato l'ottimizzatore `fmincon`.
- Differenze dal problema precedente
  - Stima della costante tramite mesh di controllo
  - Discontinuità della funzione obiettivo

Algoritmo di ricerca

- Anche per la ricerca dei punti di Lebesgue si è utilizzato l'ottimizzatore `fmincon`.
- Differenze dal problema precedente
  - Stima della costante tramite mesh di controllo
  - Discontinuità della funzione obiettivo
  - Fondamentale una buona configurazione iniziale (i punti di Fekete)

Algoritmo di ricerca

- Anche per la ricerca dei punti di Lebesgue si è utilizzato l'ottimizzatore `fmincon`.
- Differenze dal problema precedente
  - Stima della costante tramite mesh di controllo
  - Discontinuità della funzione obiettivo
  - Fondamentale una buona configurazione iniziale (i punti di Fekete)
  - Molteplici restart con aumento ad ogni passaggio della cardinalità della mesh di controllo

Primo metodo

- Viene imposto ai punti unicamente di non uscire dal dominio

Primo metodo

- Viene imposto ai punti unicamente di non uscire dal dominio

Vantaggi

- Ogni disposizione di punti è possibile

Primo metodo

- Viene imposto ai punti unicamente di non uscire dal dominio

Vantaggi

- Ogni disposizione di punti è possibile

Svantaggi

- Inefficiente per gradi maggiori di 6

Secondo metodo

- Fissiamo i punti sui bordi e lavoriamo solo su quelli interni come per la ricerca dei punti di Fekete

Secondo metodo

- Fissiamo i punti sui bordi e lavoriamo solo su quelli interni come per la ricerca dei punti di Fekete

Risultati

- Affinando la mesh di controllo ad ogni restart si sono migliorate le costanti di Lebesgue per il triangolo note in letteratura
- È possibile spingersi a gradi elevati

Secondo metodo

- Fissiamo i punti sui bordi e lavoriamo solo su quelli interni come per la ricerca dei punti di Fekete

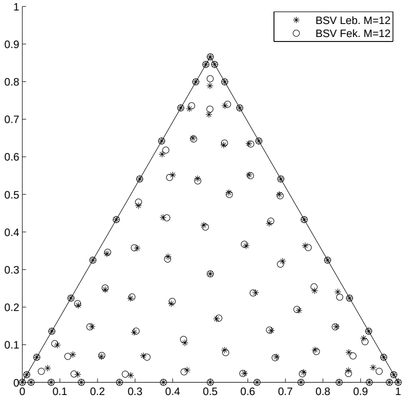
Risultati

- Affinando la mesh di controllo ad ogni restart si sono migliorate le costanti di Lebesgue per il triangolo note in letteratura
- È possibile spingersi a gradi elevati

Importante

- Le costanti possono essere ulteriormente migliorate ottimizzando i punti lungo i bordi e sfruttando la capacità di parallellizzazione dell'algoritmo.

Immagini



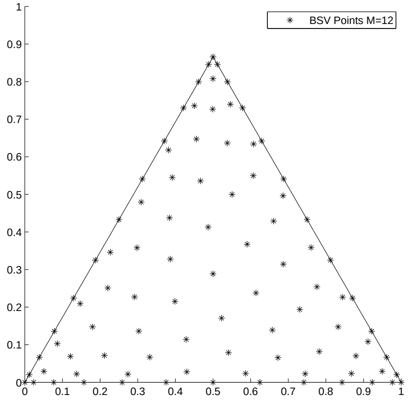
PUNTI DI FEKETE

	BSV. Fek.		TWV	
Grado	Λ_n	$\lvert \det V \rvert$	Λ_n	$\lvert \det V \rvert$
3	2.11	3.45e8	2.11	3.45e8
6	4.17	2.29e29	4.17	2.29e29
9	6.97	3.79e64	6.80	2.39e64
12	8.55	7.22e115	9.67	6.15e115
15	11.40	9.66e183	10.01	4.60e183
18	14.38	4.10e269	14.73	1.04e269

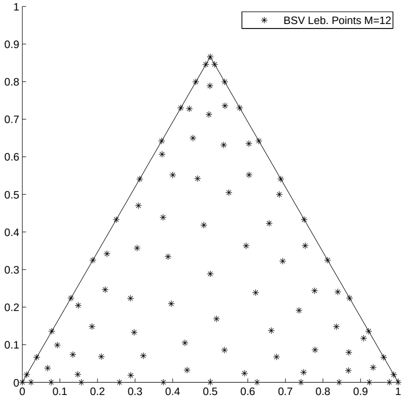
PUNTI DI LEBESGUE

	BSV. Leb.		Heinrichs	
Grado	Λ_n	$\lvert\det V\rvert$	Λ_n	$\lvert\det V\rvert$
3	1.97	2.01e8	-	-
6	3.39	4.22e28	3.68	1.84e29
9	5.27	2.70e62	5.59	1.42e64
12	6.97	2.85e115	7.51	2.59e115
15	9.04	1.89e182	9.25	-
18	9.88	1.44e268	11.86	-

BSV Fekete



BSV Lebesgue



BSV TWV Fekete